Euclides

Vakblad voor de wiskundeleraar
Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Wolters-Noordhoff

816
357
492

jaargang 67 1991 | 1992 november

● Euclides ● ● ● ●

Redactie

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 55,00 per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 37,50; contributie zonder Euclides *f* 30,00. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:
- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

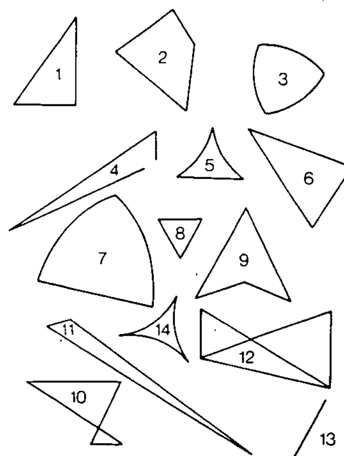
Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 60,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 39,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 10,00 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
ACQUI' MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert. Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

ISSN 01.65-0394

Inhoud



Benoemingsspel.

▶ Het beroep van wiskundige (2)[1]

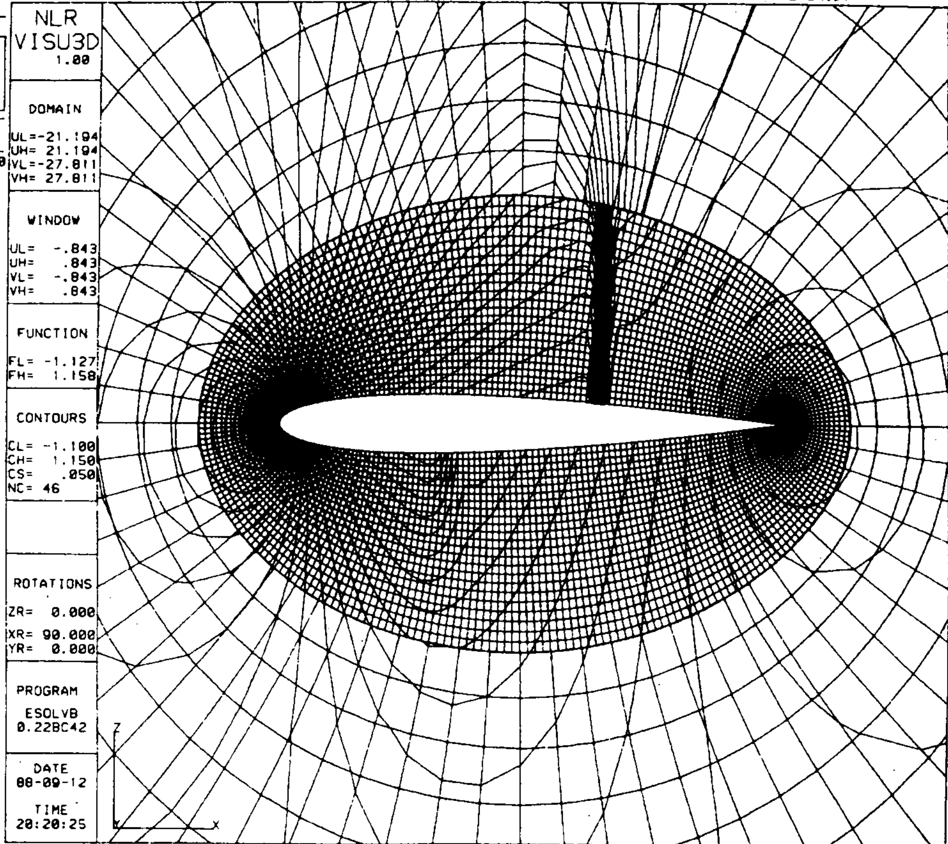
G. Y. Nieuwland

Nog iets meer over wat vooraf ging.

In het eerste deel van deze beschouwing over de beroepsuitoefening van de wiskundige werd een opmerkelijk feit gesignaleerd: wiskundige kennis wordt in de historische ontwikkeling veelal in zodanige vorm gebracht dat de hantering daarvan in niet-wiskundige beroepskringen mogelijk wordt. Echter: wanneer zo'n proces voltooid is wordt het resulterende kenniscomplex niet meer als onderdeel van de wiskunde ervaren, door de betrokken beroepsgenoten zomin als door wiskundigen. Dit *emulgatie-proces* van wiskundige noties in de niet-wiskundige beroepspraktijk kan aan diverse historische voorbeelden worden gedemonstreerd. Tegenwoordig heeft zo'n proces zijn eindstadium bereikt wanneer de fundamentele wiskundige inhouden van een beroepspraktijk in een pakket computerprogramma's zijn neergelegd, dat wordt gebruikt door mensen met een significant lager niveau van wiskundig inzicht dan noodzakelijk zou zijn om de betreffende wiskunde inhoudelijk te doorgronden.
Een dergelijke afgesloten situatie wordt natuurlijk zelden in reincultuur aangetroffen. In diverse wetenschappelijke beroepsgroepen – zeg binnen de elektrotechniek of de stromingsleer – vindt men een indrukwekkende wiskundige subcultuur, op een niveau van praktische vaardigheid waarop wiskundigen het vaak laten afweten. Vanuit de wiskunde gezien zijn echter ook de kenmerken van een subcultuur opvallend: een blokkendoos van onderling verbonden wiskundige begrippen, waarover in een eigen vaktaal wordt gesproken en waarbij de relatie met de buiten de doos dichtbij gelegen wiskundige noties nauwelijks meer wordt beseft. Dit wil niet zeggen dat zo'n subcultuur is afgesloten voor relevante nieuwe wiskundige ideeën, hetzij gegenereerd binnen de beroepsgroep of door wiskundigen daarbuiten. Maar door de noodzaak van emulgatie dringt wiskundige kennis slechts moeizaam door, vooral als die ideeën van buiten komen. Interessant is ook het verschijnsel dat wiskundigen, die vaak zonder veel moeite in zo'n subcultuur worden opgenomen, snel hun wiskundige identiteit verliezen en de kleur van hun omgeving aannemen. Deze aanpassing is een kwestie van lijfsbehoud: slechts omgevingen met een sterke onderzoektraditie varen wel bij de aanwezigheid van een *lunatic fringe*.
Het eerste deel eindigde met een vraag: is er een bijzonder aspect van de wiskunde dat een dergelijk toch niet positief te duiden effect oproept? Laten we voor een beantwoording als tevoren teruggaan naar het verre verleden, maar nu naar de bakermat van de systematische wetenschap: het oude Griekenland.

Wiskunde in de Academie en daarbuiten.

Voor de oude Griekse wijsgeren stond één vraag centraal: hoe krijg ik denkend vat op een veranderlijke wereld? Binnen die vraagstelling ontwikkelden zich twee visies op wat nu wel het eigenlijke probleem was. Voor de Platoonse school was de grondvraag: wat is blijvend in de veranderlijke schijn der dingen? De Aristotelische versie luidde: hoe komt uit het bestaande het nieuwe voort? Zoals bekend wordt de ontwikkeling van de wiskunde vooral gezien in de eerste, eeuwenlange traditie van de door Plato gestichte Academie. Immers, zijn niet getal en ruimte de klaarblijkelijke invarianten in de waan der verschijnselen? In het Aristotelische Lyceum kwamen vooral de Griekse natuurwetenschappen (geneeskunde en de mechanica) tot ontwikkeling – en het heeft eeuwen gekost zich aan die



... in de wiskundige beroepskringen buiten de academie worden nu eenmaal weinig stellingen bewezen.
(Afbeelding: NLR)

invloeden te ontworstelen.

Het zou een leerzame *science fiction* opleveren: een herschrijving van de wetenschapsgeschiedenis, uitgaande van de veronderstelling dat op dit historisch bifurcatiepunt de grote Aristoteles een betere wiskundige was geweest. Dan is aannemelijk dat ook de historische discussies over de grondslagen van de wiskunde – de vraag naar de basis van de wiskunde in de werkelijkheid – zich minder onder de ban van de realistische wijsgerige traditie hadden afgespeeld.

De geschiedenis verliep langs andere paden: de Griekse wiskunde ging via een Arabisch intermezzo deel uitmaken van de Europese wetenschap en heeft via de op Euclides geïnspireerde schoolwiskunde ook de kijk van de buitenstaander op de wiskunde eeuwenlang en diepgaand beïnvloed. Tegelijk kwam een eigen Europese traditie op gang die, een uitgangspunt nemend in de vragen van de praktijk, via Galilei, Newton en Leibniz, in nauwe relatie met een vernieuwde visie op de natuurwetenschap tot ontwikkeling kwam. Deze ontwikkeling zou in de klassieke analyse van de negentiende eeuw een hoogtepunt bereiken. Tot aan het eind van die eeuw bestaan wat ik nu maar even de P- en de A-traditie binnen de wiskunde zal noemen vreedzaam naast elkaar. En inderdaad: als getal en ruimte zich als ideële entiteiten in de werkelijkheid om ons heen afspiegelen en tevens de studieobjecten van de wiskunde zijn, dan moet ook beschrijving van die werkelijkheid een integrerend deel van de wiskunde uitmaken. Men ziet dan ook in de

vorige eeuw wel een onderscheid, maar geen tegenstelling tussen zuivere en toegepaste wiskunde; vrijwel alle grote wiskundigen leverden toen spanningsloos aan beide hun bijdragen. Overigens had toen nog, volgens een opmerking van Freudenthal, driekwart van de wiskundige productie betrekking op de mathematische fysica.

Crisis, what crisis?

Aan deze vreedzame coëxistentie kwam een eind, toen aan het eind van de negentiende eeuw de P- en de A-traditie in dramatische aanvaring kwamen. Uit de pogingen het vijfde postulaat van Euclides te bewijzen was het inzicht voortgekomen dat het begrip ruimte niet noodzakelijk met Euclidische ruimte samenviel; in de natuurwetenschap werd ontdekt dat de fysische ruimte in ieder geval niet het Euclidische universum weerspiegelde; ook kon het begrip reëel getal niet meer als evident gevolg uit de fysische eigenschap van continuïteit van de wereld worden afgelezen. Maar als het klaarblijkelijk inzicht in de werkelijkheid, al dan niet met Platoonse ontologische garantie, niet meer de onbetwistbare basis voor de wiskunde kan zijn, wat dan ter wereld wel? Het was op dit punt dat Hilbert, de grootste wiskundige van zijn tijd, zijn magistraal programma op tafel legde: bewijs dat de wiskunde een formeel systeem van uitspraken is, consistent, vrij van tegenspraak en in beginsel in een eindig aantal stappen verifiëerbaar. Dit programma verwoordde het klassieke wiskundige ideaal, dat overigens in gevulgariseerde vorm ook vandaag nog de kijk van de *man in the street* op de wiskunde bepaalt. Het zou de P-traditie moeten redden, maar wel ten koste van een hoge prijs: de waarheid van de wiskundige uitspraken zou niet meer gelegen zijn in de overeenstemming daarvan met enige in de werkelijkheid gegeven hoedanigheid, maar slechts in de regels van de formele logica. In het bijzonder plaatste het programma daarmee de A-traditie, voorzover in deze lijn de wiskundige aspecten van andere vakgebieden werden bestudeerd, in de optiek van veel wiskundigen weer resoluut buiten de wiskunde. Hilbert zelf zal achter dat formeel systeem nog altijd de axiomatische basis van een concreet stuk wiskunde hebben gezien. Maar in de verder (wiskundige!) ontwikkeling van de theorie werd al spoedig de band met de concrete wiskunde als niet meer relevant ervaren. Zo gezien wordt de wiskunde een volgens de regels van de logica gespeeld *spel*, met nog slechts een glimp van esthetische bekoring als Platoons restant. Zoals de rituele waarschuwing bij de Amerikaanse filmtitels aangeeft: elke overeenstemming met de werkelijkheid moet dan op puur toeval berusten. Tussen zuivere en toegepaste wiskunde bestaat zo geen onderscheid maar een tegenstelling: immers toegepaste wiskunde behoort principieel tot een ander vakgebied.

Blijvende gevolgen

De catastrofale afloop van Hilbert's programma is algemeen bekend, een ieder heeft daarover tot zelfs uit de stationsboekhandel[2] informatie kunnen krijgen. Zoals wel vaker in de geschiedenis gaf de vergissing van een waarlijk groot wiskundige aanleiding tot een vruchtbare en boeiende opbloei, in dit geval van de studie van de logica en grondslagen van de wiskunde. De in deze vakgebieden gevoerde discussies hebben tot heden niet tot consensus geleid[3] en hebben zich ook overigens wat terzijde van het normale wiskundige bedrijf afgespeeld. Voor ons onderwerp is echter van belang de constatering, dat het terugkomen op Hilbert's stellingname voor de erfgenamen van de P-traditie – die intussen een opinievormende meerderheid binnen de wiskunde waren gaan uitmaken – niet heeft geleid tot een revisie van een belangrijk corrolarium van die positiekeuze. Voor hen blijft de boven aangeduide consequente boedelscheiding van zuivere en toegepaste wiskunde overeind, ook al is de oorspronkelijke premisse gevallen. Hoewel werd aangetoond dat de logische substructuur van de wiskunde niet als fundament de hele wiskunde kon dragen, bleef het logisch raamwerk in de prakijk wel het kenmerkende, zelfs het schiftende element van wiskundebeoefening. De échte wiskunde wordt zodoende vereenzelvigd met het *bewijzen van stellingen*, met uitsluiting van het *wiskundig experiment*, het *ont-*

wikkelen van algoritmen, de *wiskundige modellering* van de structuren in andere wetenschappen: zaken die tot aan de grondslagencrisis wel degelijk intrinsiek deel van de wiskunde hebben uitgemaakt.

Is er wel wiskunde buiten de academie?

De in de laatste paragraaf aan de orde gestelde tweedeling is intussen niet die tussen de zuivere en de toegepaste wiskunde, want ook voor wiskunde die haar aanleiding vindt in de problemen van andere vakgebieden zijn heel goed stellingen te bewijzen. Die deling geeft wél de waterscheiding aan tussen de universitaire wiskunde en die daarbuiten: in de wiskundige beroepskringen buiten de academie worden nu eenmaal weinig stellingen bewezen.
Inmiddels schemert aan het eind van deze lange excursie een begin van een antwoord door op de vraag: welke kwaliteit in de wiskunde roept het emulgatie-effect op? Want als de harde kern van wiskundigen van oordeel is, dat de toepassing van wiskunde in andere vakgebieden aan de essentie van wiskunde voorbijgaat, wie zal dan de tegengestelde claim stellen? Tegelijk schijnt ook de inleidende vraag uit deel 1 beantwoord: is wiskundige eigenlijk wel een beroep? Binnen de heersende P-traditie moet dat antwoord dus *neen* zijn.
In het laatste stuk hoop ik aan te tonen dat op beide posities nog wel wat af te dingen valt.

Aanbevolen lectuur (paperback editie)
Hodges, Andrew, *Alan Turing: The enigma*, Touchstone Book, New York (1984).
Hofstadter, Douglas R., *Gödel, Escher, Bach, an Eternal Golden Braid*, Vintage Books, New York (1980).
Penrose, Roger, *The Emperor's New Mind*, Vintage, Londen (1990).

Noten

1. Deel 1 in Euclides, jrg. 67, nr. 2, 1991.
2. De aan het slot genoemde boeken zijn misschien wat zwaar als treinlectuur, maar bevatten uitstekend materiaal om de schoolwiskunde in een breder kader te plaatsen.
3. Men zie bijvoorbeeld het betwistbare standpunt van Goodman in J. Symb. Logic, **55**, 1990, pp. 182-193.

● 40 jaar geleden ● ●

▶ Listiglijk

Het spelkarakter der wiskunde komt ook duidelijk tot uiting in de wijze waarop zij wordt beoefend. Ik geef U een voorbeeld. Het aloude, in 1778 gestichte Wiskundig Genootschap publiceert telken jare een reeks van wiskundige opgaven, aan welke series vrijwel alle wiskundigen in ons land meewerken of hebben meegewerkt. De redacteur plaatst alleen opgaven waarvan de oplossing is bijgevoegd; hij houdt deze laatste voorlopig achter. Een jaar lang trachtten een groot aantal mathematici deze vraagstukken op te lossen, let wel, niet ter oefening in, maar tot beoefening van de wiskunde; zij wijden daaraan vele uren en veel energie. En al die tijd weten zij, dat de oplossing, die volgend jaar vrij en zonder octrooi zal verschijnen er al lang is en veilig rust bij Bremekamp thuis in een la. Ik meen dat dergelijke situaties buiten de wiskunde vrijwel niet voorkomen. Gij hebt het volste recht deze werkwijze te veroordelen als oneconomisch en inefficient en als verspilling van ernst, maar dan hebt gij vergeten, dat spel heeft 'zijn doel in zichzelf, en begeleid wordt door een gevoel van vreugde of spanning'. Gij treft dezelfde mentaliteit aan in het tijdperk van een Huygens of een Bernoulli, waarin de grote wiskundigen elkaar hun resultaten zenden, de bewijzen in een bijgevoegd anagram listiglijk verbergend.

Prof. Dr. O. Bottema in Euclides 27-4 (1951-1952).

► Meetkundig onderzoek komt eerst

J. Michael Shaughnessy,
William F. Burger

Om te beginnen geven we een gesprek weer dat een interviewer had met een tweedeklasser, die juist met goed gevolg een jaar meetkunde had gedaan – het gaat hier over een onderwijssysteem waarin meetkunde als apart vak voorkomt.

De interviewer vroeg: 'Stel dat je een vierhoek hebt waarvan, twee aan twee, de overstaande zijden even lang zijn. Lopen die overstaande zijden dan ook evenwijdig? Hoe zou je dit zeker kunnen weten?" –

De leerling begon tekeningen te maken van vierhoeken, en tekende zelfs enkele hulplijnen om congruente driehoeken te zoeken, maar bleef daarna geruime tijd peinzen.

Interviewer: Wat proberen we hier te doen?
Leerling: Een bewijs leveren.
I: Waarom willen we dat?
L: Dat weet ik niet, dat heb ik nooit goed gesnapt.
I: Stel dat we zeker willen weten dat dat van die evenwijdigheid klopt.
L: O, nee!
I: Wat zouden we dan doen?
L: Ik zei toch al dat ik niet goed kan bewijzen! Ik geloof dat er wel een stelling bestaat, maar die ben ik vergeten.
I: Ik krijg zo de indruk, dat je niet erg dol bent op stellingen.
L: Mijn lerares maakte daar altijd moeilijke vragen over, enkel om je een dikke onvoldoende te geven.
I: Maar je vindt wiskunde wel leuk?
L: Ja, maar die meetkunde, dat is wat anders.
I: Anders dan wat?
L: Dan wiskunde!
I: Wat vind je leuk aan wiskunde?
L: Algebra.
I: Waarom houd je van algebra?
L: Omdat dat met getallen is. Ik kan niet zo logisch denken.
I: Je hebt er anders wel een begin mee gemaakt.
L: Nou, dan ging ik er mee aan de gang en maakte een mooi bewijs, en dan zei ze weer dat ik een stap zus en een stap zo had moeten doen, en ik wist nooit waar die stappen voor nodig waren.
I: Hebben jullie wel eens iets gedaan met oppervlakte en inhoud?
L: Ja, daarmee heb ik er toch nog een voldoende van kunnen maken.

Deze leerling was er één die volgens haar lerares heel goede resultaten had behaald in de meetkunde. Onder de leerlingen die we in de loop van twee jaar interviewden, was zij één van de weinigen die überhaupt de noodzaak van een bewijs inzag, en een heel eind kwam met het opzetten ervan. En toch ziet ze zichzelf blijkbaar niet als een goede meetkundeleerling.

Middelbare scholieren zouden tenminste een half jaar lang meetkunde zonder bewijzen moeten krijgen.

Leraren die meetkunde geven weten, dat deze leerling geen uitzondering vormt. De meeste middelbare scholieren die meetkunde volgen hebben grote moeite met het afleiden van regels en het geven van bewijzen. Ze onderkennen de betekenis van een axiomastelsel niet. Ze zien niet wat het belang is van een formeel systeem.

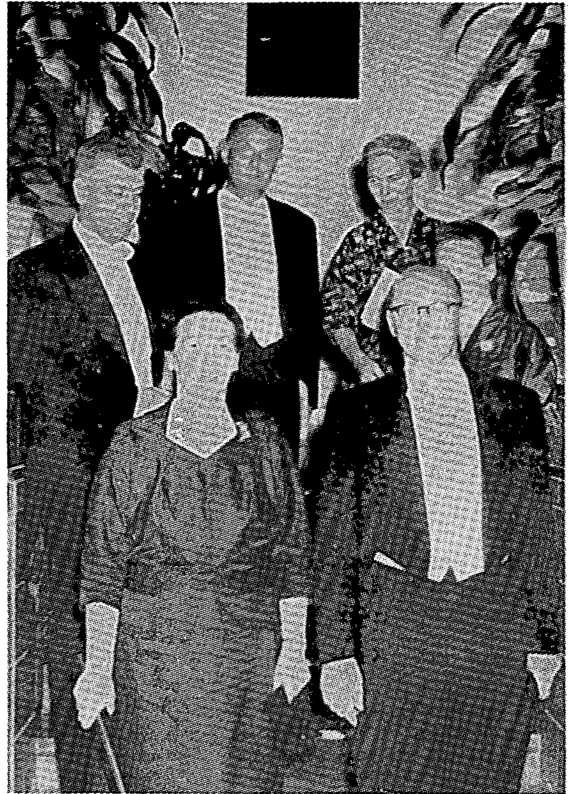
Al onze inspanningen ten spijt kunnnen zelfs de meest begaafde algebra-leerlingen overhoop komen te liggen met meetkunde, en er slechts met behulp van veel stampwerk en door pure wilskracht doorheen komen, zonder evenwel veel begrip te hebben gekregen van het logische geheel

waaraan ze een jaar lang gewerkt hebben. Waarom hebben leerlingen het zo moeilijk met meetkunde? Gedurende enkele jaren werkten we aan een project waarin werd onderzocht hoe kinderen zich meetkundige begrippen eigen maken. In het onderzoek werden niet alleen middelbare scholieren, maar ook basisschoolleerlingen betrokken.
De aanleiding tot dit onderzoek vormde een theorie over **'niveaus'** van meetkundig denken, welke theorie voor het eerst werd uiteengezet door twee Nederlandse wiskundeleraren, Pierre van Hiele en Dina van Hiele-Geldof. In het kader van het project werd een soort *werk*gesprek ontwikkeld en in praktijk gebracht met ruim 70 kinderen.
De resultaten van het onderzoek en de theorie van Van Hiele zijn van belang voor de manier waarop op school meetkunde wordt gegeven, en voor de manier waarop leerlingen zich meetkundige begrippen eigen maken. In dit artikel zullen wij de niveaus van Van Hiele en onze wijze van gespreksvoering beschrijven, enkele reacties van leerlingen bespreken, en tenslotte op grond van de onderzoeksresultaten enige suggesties doen voor het geven van meetkunde-onderwijs.

De niveaus van Van Hiele

De Van Hieles waren wiskundeleraren die bij het aanbieden van formele regels met dezelfde problemen te maken kregen als wij allemaal. Uit waarnemingen in de klas kwamen de Van Hieles tot de slotsom dat de leerlingen in het omgaan met meetkundige begrippen verschillende niveaus doorliepen. Deze niveaus zullen we verduidelijken met behulp van het begrip 'rechthoek'.

Niveau 0: **visualisatie.** Bij Hoffer (1981) en ook bij Prevost (1985) heet dit niveau: **herkenning**; zie Euclides 63-7, bladzijde 191-198.
Op dit niveau wordt een meetkundige figuur als een geheel gezien; aan onderdelen ervan wordt geen aandacht geschonken. De beschrijvingen die van de figuur worden gegeven zijn zuiver visueel gevormd. Als een leerling gevraagd wordt waarom hij of zij een vorm een rechthoek noemt, kan het antwoord luiden: 'Omdat dat op een rechthoek lijkt. Het is net een raam of een deur'. Zulke



Dubbelpromotie in 1957. Vooraan D. van Hiele-Geldof en P. M. van Hiele.

beschrijvingen zijn gebaseerd op een visuele grondvorm.

Niveau 1: **analyse** (ook Hoffer en Prevost gebruiken deze term).
Leerlingen op dit niveau denken bij een rechthoek aan een verzameling eigenschappen die hij moet hebben (noodzakelijke voorwaarden derhalve). Gevraagd waarom een zekere figuur een rechthoek is, zal de leerling antwoorden met een opsomming van eigenschapppen: 'De overstaande zijden zijn evenwijdig, je hebt vier rechte hoeken, de overstaande zijden zijn even lang, de vier hoeken zijn even groot ...'

Niveau 2: **informeel redeneren.** Hoffer en Prevost gebruiken de term **ordening.**

Op dit niveau kan de leerling voldoende voorwaarden uit de zojuist gegeven opsomming selecteren om een rechthoek te omschrijven. Dat wil zeggen, dat de leerling de eigenschappen op een logische wijze ordent, en de rol van algemene definities begint te begrijpen. Leerlingen kunnen eenvoudige redeneringen geven en zekere categorieën onderkennen, zoals: vierkanten zijn rechthoeken.

Activiteiten waaraan informele meetkunde te pas komt moeten opgenomen worden in het onderwijsprogramma voor 12- tot 16-jarigen.

Niveau 3: **formeel redeneren.**
Op dit niveau hebben leerlingen de rol van axioma's, definities en stellingen volledig begrepen, en kunnen ze eigen bewijzen leveren. Momenteel wordt de meetkunde op veel Amerikaanse scholen op dit niveau benaderd.

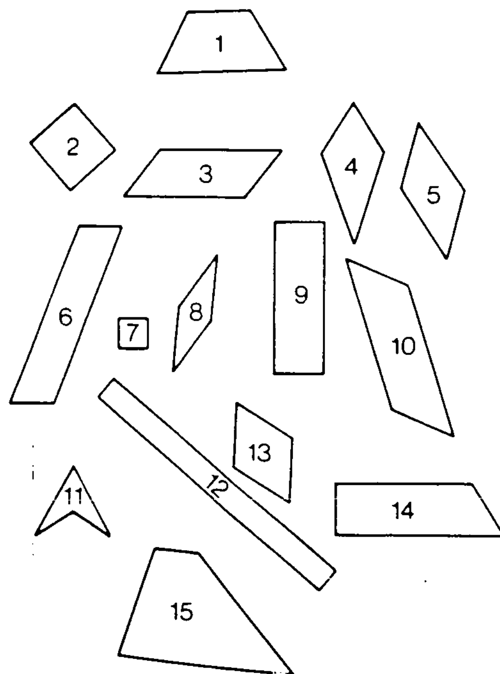
Niveau 4: **volledige beheersing.**
Op dit niveau, dat door middelbare scholieren zelden wordt gehaald, kunnen leerlingen verschillende logische systemen met elkaar vergelijken. Bijvoorbeeld: wat houden we over als we het parallellenpostulaat laten vallen?

De opdrachten tijdens het interview

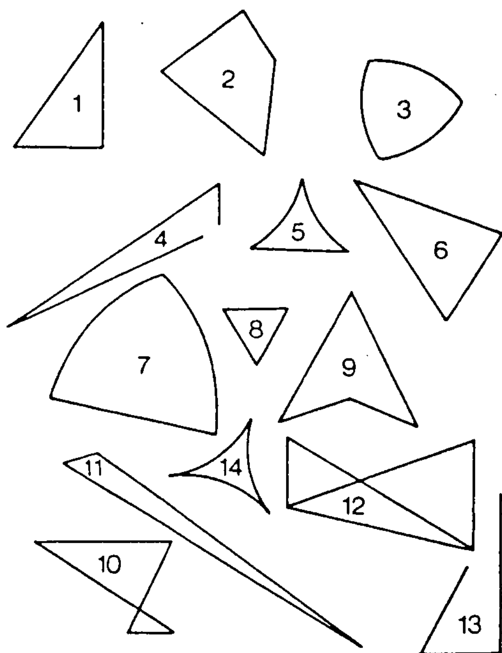
Eén van de doelstellingen van ons project was het ontwerpen van een aantal opdrachten die ons duidelijk moesten maken in hoeverre de niveaus van Van Hiele bruikbaar waren. Dit spitsten we toe op het beschrijven, door leerlingen, van meetkundige figuren, van zelfgemaakte tekeningen, veelal in een soort spelsituatie.
De opdrachten werden zó ontworpen, dat ze aan kinderen van alle leeftijden konden worden voorgelegd, van kleuters tot studenten. De gesprekken vonden plaats in een ongedwongen sfeer en werden op geluidsband opgenomen. Bij middelbare scholieren vroegen we ons onder meer af hoe hun reacties zouden uiteenlopen vóór, tijdens en ná een leerjaar meetkunde op school. We zullen een korte beschrijving van enkele gesprekken geven, en vervolgens een paar reacties nauwkeuriger bekijken.
De opdrachten omvatten (1) tekenen, (2) benoemen, (3) sorteren, (4) 'Ik zie een vorm die jij niet ziet' (een redeneerspelletje), (5) stellingen en bewijzen.

Tekenen De leerling werd gevraagd een driehoek te tekenen, er vervolgens één te tekenen die op de een of andere manier van de eerste verschilde, dan nòg één die weer van de eerste twee verschilde, en zo voort.
'Hoeveel verschillende driehoeken kun je tekenen? Waarin verschillen ze?''

Benoemen Met een blad met meetkundige figuren voor zich – zie figuur 1 – kreeg de leerling het verzoek om op elk vierkant een *V* te zetten, op elke rechthoek een *R*, op elk parallellogram een *P* en op elke ruit een *Ru*. Daarna werd de leerlingen gevraagd waarom ze juist op deze wijze de letters



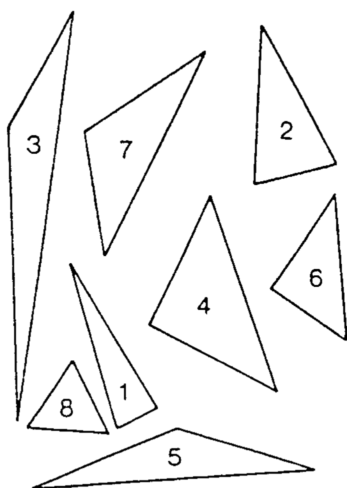
Figuur 1

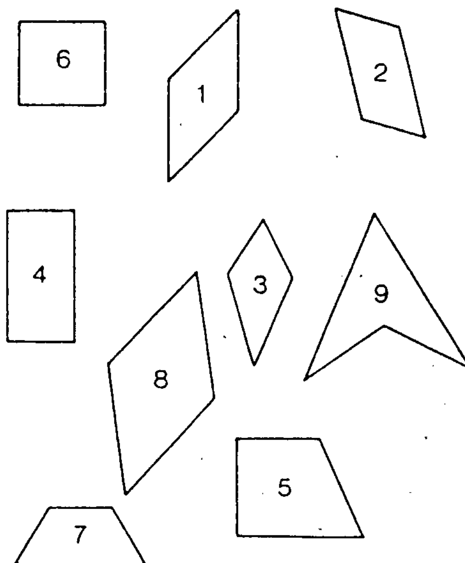


Figuur 2

hadden geplaatst, en waarom ze bepaalde figuren geen letter hadden toegekend.
In het *definiërende* deel van deze opdracht werd hun gevraagd: 'Waar zou je iemand op laten letten als hij of zij alle rechthoeken uit een stel figuren zou moeten aanwijzen? Zou je dit zo kort mogelijk kunnen zeggen? Is nummer 2 een rechthoek? Is nummer 9 een parallellogram?' (hier werden, met andere woorden, definities bestudeerd, en indelingen in soorten; over vierkanten, parallellogrammen en ruiten werden soortgelijke vragen gesteld). Ook met driehoeken werd een benoemingsspel gedaan; zie figuur 2.

Sorteren Een reeks uit papier geknipte vormen werd voor de leerling op tafel uitgespreid. Vervolgens werd gevraagd: 'Leg vormen bij elkaar die op de een of andere manier op elkaar lijken. In welk opzicht lijken ze op elkaar? Leg er dàn enkele bij elkaar die in een ànder opzicht op elkaar lijken; waarin lijken dié op elkaar?' Het interview werd op deze wijze voortgezet, zo lang het iets leek op te leveren. Er werden twee soorten vormen gebruikt, driehoeken en vierhoeken. In figuur 4 zijn ze afgebeeld.





Figuur 4

●

'Welke vorm heb ik?' Dit redeneerspel werd als volgt met de leerlingen gespeeld. Hun werd gezegd: 'Ik ga je een lijstje met aanwijzingen over een vorm geven. Ik zal je ze één voor één laten zien, maar als je net genoeg aanwijzingen hebt om zeker te weten om wat voor vorm het gaat, moet je 'stop' roepen. Anders moet je me nog een aanwijzing vragen. Ga gerust je gang als je iets wilt tekenen; hier op tafel ligt tekengerei.' Wanneer de leerlingen ons lieten stoppen, vroegen we ze hóe ze zekerheid hadden gekregen, en of een volgende aanwijzing hen eventueel nog van mening zou kunnen doen veranderen.
In tabel 1 staan de aanwijzingen bij één van de vormen en de spelregels. (Bekijk de aanwijzingen één voor één om zo het spel te stimuleren. Een oplossing werd als juist beoordeeld indien de leerling het type wist te benoemen met behulp van het minimale aantal aanwijzingen dat ervoor benodigd was.)

Tabel 1

'Welke vorm heb ik'?
Script.

(Wees zorgvuldig bij het geven van de volgende spelregels.)
1. Straks pak ik een stuk papier met een aantal aanwijzingen over een bepaalde vorm. Ik zal je de aanwijzingen één voor één laten zien.
2. Als je net genoeg aanwijzingen hebt gekregen om zeker te weten om wat voor vorm het gaat, moet je 'stop' roepen. Als je nòg een aanwijzing nodig hebt, vraag je daar gewoon om.
3. Maak rustig een tekening als je dat wilt. Je kunt eventueel ook hardop denken, of mij zeggen wat je denkt.

Aanwijzingen
1. Het is een gesloten figuur met vier rechte zijden.
2. De figuur heeft twee lange en twee korte zijden.
3. De figuur heeft een rechte hoek.
4. De twee lange zijden zijn evenwijdig.
5. De figuur heeft twee rechte hoeken.
6. De twee lange zijden zijn niet even lang.
7. De twee korte zijden zijn niet even lang.
8. De twee korte zijden zijn niet evenwijdig.
9. De twee lange zijden vormen elk een rechte hoek met één van de korte zijden.
10. De figuur heeft slechts twee rechte hoeken.

Stellingen en bewijzen Deze opdracht werd alleen met de middelbare scholieren uitgevoerd. We vroegen of ze ooit de termen axioma, stelling en definitie hadden gehoord. Indien dat het geval was, vroegen we om een voorbeeld van elk. Tenslotte stelden we de vraag uit het begin van dit artikel: 'Stel dat je een vierhoek hebt waarvan, twee aan twee, de overstaande zijden even lang zijn. Lopen die overstaande zijden dan ook evenwijdig?' We stelden de vraag ook wel andersom.

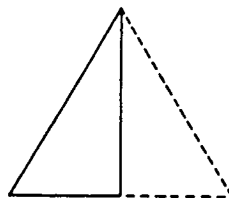
Reacties op de opdrachten

Gedurende een periode van twee jaar werden basisschoolleerlingen, middelbare scholieren en studenten uit het hoger onderwijs geïnterviewd. Elk interview duurde ongeveer twee uur en werd op geluidsband opgenomen. Een steekproef van veertien gesprekken werd door drie projectmedewerkers nader geanalyseerd, en van elk van die veertien gesprekken werd een uittreksel met een analyse van tezamen zo'n twintig bladzijden opgesteld. Zodoende werd een schat aan gegevens verzameld. Hieronder volgt een overzicht van de resultaten.

Tekenen Gevraagd naar de verschillen tussen hun tekeningen antwoordden veel leerlingen dat sommige van hun driehoeken 'dikker' of 'puntiger' waren dan andere. Zeer jonge kinderen dachten dat ze maar een paar driehoeken konden tekenen, misschien drie of vier, en deze verschilden dan dikwijls slechts qua oriëntatie (d.w.z. qua richting waarin ze 'wezen'). De basisschoolleerlingen en de brugklassers bleken bij voorkeur slechts te letten op de visuele verschillen tussen de tekeningen. Middelbare scholieren die nog geen meetkunde hadden gehad beschreven de verschillen het liefst door te wijzen op onderdelen van de vormen, bijvoorbeeld op zijden van verschillende lengte. Deze leerlingen gaven aan, dat er een oneindig aantal verschillende driehoeken mogelijk was.
Leerlingen die omstreeks een jaar meetkunde hadden gehad concentreerden hun aandacht op 'types' driehoeken: rechthoekige, gelijkbenige, ongelijkzijdige, scherphoekige en dergelijke.
Leerlingen die al sinds een jaar of langer geen meetkunde meer gevolgd hadden, herkenden nog

wel de types, maar vielen vaak terug op visuele beschrijvingen: 'scherpere punt', 'dikker'.

Benoemen Toen hun gevraagd werd alle driehoeken in figuur 2 aan te wijzen, rekenden middelbare scholieren die geen meetkunde hadden gehad daar dikwijls vormen bij die normaliter geen driehoek heten (zoals bepaalde vormen met kromme zijden), terwijl de basisschoolleerlingen heel wat driehoeken verwierpen waar niets aan mankeerde. De middelbare scholieren die geen meetkunde hadden gehad rekenden gewoon enkele, zo niet alle, van de vormen 3, 5, 7 en 14 tot de driehoeken.
Jonge kinderen weigerden gewoonlijk nummer 11 een driehoek te noemen. Zelfs wanneer ze erkenden dat nummer 11 'drie punten en drie lijnen' had, bleven ze volhouden dat nummer 11 'te puntig' was. Vorm 11 werd een 'mes' genoemd, of een 'raket', maar voor veel kinderen die we interviewden was het géén driehoek. Sommige 8- tot (zelfs) 14-jarigen vonden dat alleen nummer 8 een driehoek was. Voor hen was dit blijkbaar de ideale driehoek, en iets anders kwam niet in aanmerking. Een brugklasser wees slechts vorm 1 aan, en zei dat de 'andere' driehoek weggelaten was. Deze leerling vond, dat er maar een 'halve' driehoek gegeven was (zie figuur 3).
Heel wat leerlingen, onder wie sommigen die meetkunde op school kregen, draaiden het papier met figuur 1 erop een stukje om te zien of vorm 2 een vierkant was, of vorm 12 een rechthoek. Het volmaakt onbelangrijke aspect van de oriëntatie beïnvloedde hun oordeel, want als het papier weer teruggedraaid werd zeiden ze dat vorm 2 geen vierkant was maar een ruit.
De rest van deze opdracht was gewijd aan het informeel definiëren van vormen. De leerlingen werd bijvoorbeeld gevraagd waarop ze een vriendje of vriendinnetje zouden laten letten als díe alle rechthoeken tussen andere vormen zou moeten aanwijzen. De basisschoolleerlingen keken ons alleen maar gek aan en antwoordden: 'Ik zou gewoon zeggen alle rechthoekjes aan te wijzen', of 'Neem alle deuren'.
Middelbare scholieren, al of niet meetkundelessen volgend, dreunden meestal een waslijst van veelal 'overtollige' eigenschappen op: overstaande zijden evenwijdig, overstaande zijden gelijk, vier rechte



Figuur 3 Het 'rechter' gedeelte van de driehoek miste, volgens een leerling.

hoeken, gelijke overstaande hoeken, enz. Wanneer hun gevraagd werd deze lijst zoveel mogelijk in te korten en hun vriendje/vriendinnetje niettemin voldoende informatie te geven herhaalden ze dezelfde onnodig lange lijst – maar dan veelal in telegramstijl!
Enkele leerlingen gaven een opsomming van eigenschappen en zeiden dan: 'Maar dat is geen goede definitie. Zo staat-ie niet in 't boek.'
We vroegen zo'n leerling hoe de definitie in het boek luidde, waarop deze leerling antwoordde: 'Dat zijn de dingen die in 't rood staan'. De definities in het boek werden niet naar waarde geschat.

Enkele leerlingen gaven een opsomming van eigenschappen en zeiden dan: 'Maar dat is geen goede definitie. Zo staat-ie niet in 't boek'.

Zelden werd onderkend, dat er voor één vorm soms wel twee namen mogelijk zijn. Aan het einde van de opdracht stelden we vragen over deze zaken. Sommige van de leerlingen gingen nu terug naar de tekeningen en benoemden alle vormen juist. Ze noemden bijvoorbeeld vorm 2 in figuur 1 zowel een rechthoek als een vierkant, en vorm 9 zowel een parallellogram als een rechthoek. Maar de meeste leerlingen waren het oneens met de gedachte dat zulke vormen méér dan één naam zouden kunnen hebben, ook al voldeden deze aan de 'definities' die zij ons zojuist gegeven hadden.
Het leek erop, dat de kinderen gewoon een lijst eigenschappen opdreunden die ze in de meetkundeles geleerd hadden, maar dat ze deze eigenschappen niet op een vorm konden betrekken. Verscheidene

leerlingen hielden bijvoorbeeld vol dat vorm 12 weliswaar evenwijdige overstaande zijden had, maar dat het toch geen parallellogram was, omdat het er niet als een parallellogram uitzag. Als er een conflict kwam tussen de Van Hiele-niveaus 1 en 2 (*visualisatie* en *analyse*), dan won gewoonlijk het laagste niveau.

Sorteren De uitkomst van de sorteer-opdracht was in overeenstemming met die van de tekenopdracht; zie figuur 4. Leerlingen die een jaar meetkunde hadden gehad sorteerden de vormen naar type, of naar de één of andere eigenschap. Ze hanteerden een groot aantal categorieën, zoals: rechthoeken, tenminste één rechte hoek, parallellogrammen, een paar evenwijdige zijden, loodrecht op elkaar staande diagonalen.
Leerlingen die nog niet of niet meer deelnamen aan meetkundelessen gebruikten daarnaast allerlei categorieën waarvoor geen behoorlijke wiskundige definitie mogelijk is, zoals: 'deze hebben een grote hoek', of 'deze hebben een lange kant'. De jongere leerlingen namen ook hier weer overwegend visuele analogieën als uitgangspunt, zoals: 'dit zijn wybertjes', 'deze hebben gewone hoeken' of 'die zijn dun'.

'Welke vorm heb ik?' De lijst met aanwijzingen voor één van de vormen – een rechthoekig trapezium – is in tabel 1 gegeven. De leerlingen kregen de aanwijzingen één voor één te zien, en daarna telkens de gelegenheid om na te denken en te tekenen. Dan vroegen ze ofwel om een nieuwe aanwijzing, of probeerden ze de vorm te raden.
Veel leerlingen, van jong tot 'oud', stopten al na de tweede aanwijzing en zeiden dat het een rechthoek was. Ze waren heel zeker van hun antwoord, en meenden dat een nieuwe aanwijzing hen niet van gedachte zou kunnen doen veranderen. En: dat zou ook niet gebeurd zijn, want de meesten van hen wisten toch niet wat een rechte hoek was!
De meeste middelbare scholieren gebruikten de aanwijzingen als *noodzakelijke* voorwaarden, ter ondersteuning van een vorm die ze al in gedachten hadden, en raakten van de wijs als een aanwijzing hun gissing 'torpedeerde'. Het gebeurde bijvoorbeeld dikwijls dat ze bij de tweede aanwijzing het idee kregen dat het om een rechthoek ging; de volgende aanwijzingen versterkten hun idee alleen maar, tot en met aanwijzing 5. Bij aanwijzing 6 zuchtten ze dan wel even.
Zulke strategieën werden gevolgd door leerlingen met of zonder ervaring in meetkunde. Het gebeurde zelden dat een 'eliminerende' strategie werd gevolgd, waarbij soorten vierhoeken werden geëlimineerd tot de informatie *voldoende* was om een bepaalde vorm te determineren. De meeste middelbare scholieren, ook degenen met meetkunde in hun programma, waren weinig zeker van hun conclusie en gaven vaak te kennen dat verdere aanwijzingen hun mening misschien nog zouden kunnen doen veranderen. Aangezien de aanwijzingen werden gezien als *noodzakelijke* in plaats van *voldoende* voorwaarden om de vorm te bepalen, verzochten de leerlingen ons om grote hoeveelheden overbodige informatie. Het was maar zelden dat ze met het minimum aantal aanwijzingen tot de juiste vorm kwamen. De waslijst van eigenschappen die we bij het benoemen tegenkwamen, kwam nu ook weer voor de dag. De leerlingen gingen vaak uit van ongerechtvaardigde veronderstellingen; bijvoorbeeld: bij aanwijzing 2 gingen ze er, zonder het te zeggen, van uit dat de twee lange zijden van gelijke lengte waren, en ook dat deze zijden tegenover elkaar lagen.

Stellingen en bewijzen Deze opdracht werd alleen met de middelbare scholieren gedaan. Degenen die meetkunde gehad hadden zeiden dat ze de termen 'axioma' en 'stelling' wel eens gehoord hadden, maar velen verwarden deze termen. 'Eén ervan bewijs je en de andere neem je aan. Ik geloof dat een stelling wordt aangenomen en dat je een axioma moet bewijzen. Maar 't kan ook wel andersom zijn.' Slechts weinigen konden de betekenis van deze termen met goede voorbeelden illustreren.
We stelden de vraag die aan het begin van dit artikel staat: 'Stel dat je een vierhoek hebt waarvan, twee aan twee, de overstaande zijden even lang zijn. Lopen die overstaande zijden dan ook evenwijdig? Hoe zou je dit zeker kunnen weten?'
Hierop werden verscheidene soorten antwoorden gegeven: visueel, statistisch (een groot aantal mogelijkheden werd onderzocht), met verwijzing naar

een hogere autoriteit, of – met de nodige hulp van onze kant – met een bewijs.
De meeste leerlingen probeerden eenvoudigweg tekeningen te maken van vierhoeken met even lange, maar niet evenwijdige overstaande zijden. Na enige pogingen besloten ze, dat de overstaande zijden evenwijdig moesten zijn, omdat 'ik ze niet anders kan tekenen'. Het was niet uitzonderlijk dat ook leerlingen met een jaar meetkunde-ervaring deze *visuele werkwijze* hanteerden (niveau 0). Sommige leerlingen benaderden het probleem als een oefening in het verzamelen van gegevens: 'Om het zeker te weten, zou je het in een heleboel gevallen moeten proberen, en dan nog zou je het niet helemaal zeker weten'.
Als een leerling wèl de noodzaak van een bewijs inzag, gebeurde het soms dat hij of zij weigerde te proberen een bewijs te zoeken en daarentegen naar een hogere autoriteit verwees: 'waarschijnlijk staat hiervan in het boek wel een bewijs', of: 'Ik zou het aan mijn leraar vragen als ik het zeker wilde weten.' Op één uitzondering na kon geen enkele leerling een bewijs leveren van de evenwijdigheid van de overstaande zijden. Met enige hulp, in de vorm van zorgvuldig gekozen hints, was deze leerling in staat een bewijs te leveren.
Pas toen we een student interviewden, die wiskunde studeerde aan een 'college', kregen we te maken met iemand die de noodzaak van een bewijs onderkende en zo'n bewijs ook zelf leverde. Hij formuleerde in de loop van het gesprek heel wat vermoedens en onderwierp die aan een logische toetsing, dit in tegenstelling tot de middelbare scholieren. Van al degenen die we interviewden was hij de enige die graag op niveau 3 redeneerde.

Conclusies en consequenties voor het onderwijs in de meetkunde

Ons onderzoek naar de meetkundige kennis en vaardigheid van leerlingen was geïnspireerd door de niveautheorie van Van Hiele. De Van Hieles meenden dat het mogelijk moest zijn de opvattingen van leerlingen te wijzigen door middel van een didactiek die hen van het ene niveau van meetkundig denken naar het volgende niveau zou leiden. Zodoende stelden wij ons twee belangrijke vragen. Ten eerste: zijn de Van Hiele-niveaus bruikbaar om de redeneringen van leerlingen te beschrijven? En ten tweede: vloeien er uit de niveautheorie suggesties voort ter verbetering van het bestaande meetkundeonderwijs?

Onze conclusies zijn de volgende:

1 De Van Hiele-niveaus 0, 1 en 2 zijn zeer bruikbaar om de redeneringen van leerlingen te beschrijven. In onze gesprekken traden veel voorbeelden op van elk van deze drie niveaus van denken: *visueel, analytisch en informeel-redenerend.*

2 We kwamen niet één middelbare scholier tegen die redeneerde op Van Hiele-niveau 3. Hiermee willen we niet zeggen dat zulke leerlingen niet bestaan, maar wij hebben er geen ontmoet. Vermoedelijk is formeel redeneren op deze leeftijd een zeldzaamheid.

3 Er bestaat bij het onderwijzen van meetkunde vaak een discrepantie tussen het niveau van de docent en de niveaus van de leerlingen. Dat wil zeggen: hoogstwaarschijnlijk hebben de docent en de leerlingen het wel over dezelfde begrippen, maar op verschillende niveaus. Terwijl de docent een zorgvuldige definitie van een rechthoek op het bord schrijft (niveau 2), zit men in de klas misschien te denken aan allerlei eigenschappen die de docent niet noemt (niveau 1).

4 Wanneer wij meetkunde onderwijzen, kan het zijn dat leerlingen meetkundige begrippen in hun hoofd hebben die enorm afwijken van wat wij denken. Zelfs een begrip als 'driehoek' kan voor de leerlingen heel uiteenlopende betekenissen hebben. Als wij 'driehoek' zeggen, verstaan sommige leerlingen daaronder méér vormen dan wij, terwijl andere leerlingen het woord 'driehoek' juist reserveren voor een zeer beperkte reeks vormen.

5 De eigenschappen van figuren worden in de meeste gevallen gezien als *noodzakelijke* in plaats van als *voldoende* voorwaarden om een vorm te bepalen. Zodoende wordt de rol van definities niet goed begrepen en heeft men geen oog voor het belang van zorgvuldig redeneren.

6 Een jaar nadat zij meetkundeonderwijs volgden kan het zijn dat sommige leerlingen teruggevallen zijn naar een lager Van Hiele-niveau. De reacties van zulke leerlingen waren vaak meer *analytisch* (niveau 1) dan *informeel redenerend* (niveau 2). In feite waren de antwoorden van veel leerlingen die al een jaar geen meetkunde meer volgden vergelijkbaar met de antwoorden van de leerlingen die nog niet met de meetkunde hadden kennis gemaakt, hoewel de eerstgenoemden wel over een grotere woordenschat beschikten. Dit onderzoeksresultaat verklaart mogelijk een deel van de problemen die beginnende wiskundestudenten met bewijzen hebben.

Het onderzoeksresultaat verklaart mogelijk een deel van de problemen die beginnende wiskundestudenten met bewijzen hebben.

7 De niveaus van Van Hiele waren tevens voorwerp van onderzoek in twee andere projecten, die ongeveer gelijktijdig liepen.

In een project uit Illinois werden ruim 2000 leerlingen geïnterviewd en daar bleek dat ruim 70% van degenen die nog geen meetkunde hadden gehad nog op niveau 0 of 1 zat (Usiskin, 1982) en dat slechts degenen die er vanuit niveau 2 (informeel-redenerend) aan begonnen een goede kans hadden na een jaar meetkundeonderwijs bewijzen te begrijpen en zelf te geven.

In een ander project, aan het Brooklyn College, bekeek men in hoeverre de Van Hiele-niveaus te herkennen waren in meetkundeboeken (Geddes e.a., 1982). De meeste van de onderzochte schoolboeken presenteerden de stof op niveau 3 en bleken opgavensets te bevatten waarin van niveau 0 naar niveau 3 gesprongen werd. Dat wil zeggen: de vragen waren vaak òf geheel *visueel* van aard, òf geheel *op bewijsvoering gericht* en er waren dikwijls geen vragen van analytische of informele aard (niveaus 1 en 2).

Moeten wij ons onderwijs veranderen?

Deze vraag willen we volmondig met 'Ja' beantwoorden. Wat zouden we moeten doen? We komen tot de volgende aanbevelingen.

1 *Geef informeel meetkundeonderwijs aan alle leerlingen in het voortgezet onderwijs.* De kennismaking met meetkunde moet informeel zijn, zonder axiomatiek of bewijzen, gedurende tenminste een half jaar. Zulke informele activiteiten zouden kunnen zijn het onderzoeken van patronen en mozaïken, het ontdekken van gelijkvormigheid en symmetrie, transformaties van figuren (door middel van bewegingen) en ook onderzoek aan ruimtelijke figuren. Overal horen dan visualiseringen bij. Opgaven die toewerken naar redeneringen moeten zeker ook opgenomen worden, maar het schriftelijk leveren van zorgvuldig opgebouwde bewijzen dient achterwege te blijven. Voor de meeste leerlingen is het nodig deze informele werkwijze een vol jaar voort te zetten.
Een traditionele, formele werkwijze kan voor sommige leerlingen in het tweede halfjaar wel op zijn plaats zijn, maar zelfs dan kunnen diverse onderwerpen onbehandeld blijven. Usiskin (1980) geeft voorbeelden van onderwerpen die weggelaten kunnen worden, hoewel ze vaste prik zijn.
In veel staten van de USA worden momenteel de wiskunde-eisen voor het eindexamen verzwaard. Tegelijk verscherpen de hogere beroepsopleidingen en universiteiten de toelatingseisen voor zover het de wiskunde betreft. Het zou onjuist zijn om alle leerlingen 'meer van hetzelfde' op te dringen, met name om ze allen verplicht formele meetkunde te laten volgen. Ons onderzoek geeft aanleiding te verwachten, dat een dergelijke maatregel zowel voor leerlingen als voor leerkrachten rampzalig zou zijn.

2 *Ontwikkel activiteiten die de leerlingen door de niveaus heen leiden.* De meeste thans bestaande methodes bevatten geen teksten of opgaven die erop gericht zijn de leerlingen van niveau 0 tot niveau 1 te brengen, of van niveau 1 tot niveau 2.
De Van Hieles ontdekten de noodzaak om met hun leerlingen visuele en analytische oefeningen te doen om ze op het redeneren voor te bereiden. Dina van

Hiele ontwikkelde een complete methode die op dit principe gebaseerd was (Van Hiele-Geldof, 1957). In het blad The Mathematics Teacher presenteerde Hoffer (1981) een heel scala van voorbeelden die leerlingen kunnen stimuleren een hoger niveau van meetkundig denken te bereiken.

3 *Neem aanzienlijk meer meetkunde op in de lessen op basisschool- en onderbouwniveau.* Het is geen wonder dat middelbare scholieren niet kunnen redeneren aan de hand van meetkundige vormen. Velen van hen hebben tijdens hun jaren op de basisschool slechts vluchtig met meetkunde kennis gemaakt.
Uit ons onderzoek komt naar voren dat we de leerlingen, voordat ze in hun voortgezet onderwijs aan meetkunde gaan doen, daarvóór al gedurende geruime tijd met meetkundige begrippen kennis moeten laten maken, zodat ze – vooralsnog op informele wijze – hun ruimtelijke visuele vaardigheden kunnen ontwikkelen. Gedurende hun hele schooltijd moeten leerlingen ervaringen met informele meetkunde blijven opdoen. Als de leerlingen – nog – op een visueel niveau (niveau 0) denken, dan is dat het niveau waarop we ze moeten aanspreken, ongeacht hun leeftijd.
In de Sovjet-Unie is het wiskundeonderwijs sterk beïnvloed door de niveaus van Van Hiele en het werken met meetkundige vormen en lichamen heeft daar een belangrijke plaats gekregen in het leerplan voor de basisschool (Wirszup, 1976). Op 6- tot 8-jarige leeftijd onderzoeken de kinderen daar de eigenschappen van meetkundige vormen, verbanden tussen die vormen en gaan ze het meten aan meetkundige figuren beoefenen. Zodoende hebben kinderen in de Sovjet-Unie op hun 9-de jaar al met opgaven gewerkt die met Van Hiele-niveau 1 overeen komen. Daarna volgt er een meetkundeprogramma dat nog 7 jaar in beslag neemt.

Samenvatting

We interviewden leerlingen uit het basisonderwijs en uit het voortgezet onderwijs in het kader van ons onderzoek naar het functioneren van de Van Hiele-niveaus ten aanzien van meetkundige begrippen. Ons resultaat bevestigt de resultaten van andere onderzoekingen: hoewel de traditionele, formele meetkunde in de USA wordt onderwezen op Van Hiele-niveau 3, redeneren de meeste leerlingen slechts op niveau 1.
Dientengevolge zien de meeste leerlingen niet in waartoe axioma's dienen, wat stellingen en bewijzen zijn. Hun houding ten opzichte van de meetkunde wordt daardoor negatief beïnvloed. We zouden het leerplan zó moeten wijzigen dat de leerlingen op niveau 1 en vervolgens op niveau 2 werken alvorens we ze aan de gang laten gaan met formele bewijzen.
Daarom bevelen wij aan:
– dat alle leerlingen in het voortgezet onderwijs eerst een jaar informele meetkunde krijgen en
– dat er stappen ondernomen worden opdat er in basisschool en onderbouw van het voortgezet onderwijs een doorgaand meetkundeprogramma komt.
Meetkunde verdient binnen de schoolwiskunde serieuze aandacht. Redeneren aan de hand van meetkundige vormen is, net zo goed als het rekenen (Sherard, 1981) een *basisvaardigheid.* Het leren van meetkundige begrippen heeft een even hoog rendement bij het probleem-oplossen als het rekenen.
Informele meetkunde, het vooral ook onderzoekend bezig zijn, is iets dat we met de leerlingen gedurende hun hele schooltijd, parallel aan de ontwikkeling van het rekenen, moeten beoefenen en niet pas veel later, zoals we nu doen!

Opmerking van de redactie.

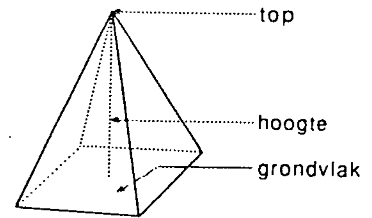
Dit artikel is vertaald door A.C. Bardet te Groningen. Aanpassing van termen aan de Nederlandse situatie (zoals: 'basisschool') is geschied onder verantwoordelijkheid van de redactie.
Oorspronkelijke titel: Spadework prior to deduction in geometry (The Mathematics Teacher, september 1985).
De auteurs zijn werkzaam aan de Oregon State University te Corvallis (Oregon), USA.

● Werkblad ●

► Hoe maak je van een vierkant een piramide?



● Werkblad ●



▶ Een piramide vouwen

1a De lengte van de zijde van een klein vierkantje in de figuur hiernaast is 6. Hoe groot is de oppervlakte?
b Arceer het grondvlak. Hoe groot is de oppervlakte van het grondvlak?
c Hoe groot is de oppervlakte van een zijvlak?
d Zet nu de piramide in elkaar.

Knip het grote vierkant hiernaast uit. De dikke lijnen worden de vouwlijnen van de piramide. De dikke getrokken lijnen worden bergvouwen, dat wil zeggen: ze vormen de kam van een berg, als je de bedrukte kant boven legt. De vier dikke stippellijntjes worden dalvouwen (dus niet knippen!), die komen binnen in de piramide. De getrokken lijnen komen op de buitenkant van de piramide.

---

e Hoe groot is de hoogte van je piramide?

2a Peter heeft een kwart van het papier genomen en daarvan op dezelfde manier een piramide gevouwen. Is de vorm van zijn piramide anders dan die van jou?
b Hij zegt: 'Wat gek, ik had gedacht dat de hoogte ook een kwart zou zijn, maar . . .'. Wat heeft hij ondekt?
c Hoe zit het met de oppervlakte van zijn grondvlak, in vergelijking met die van jou?

3a Eén van deze formules kun je gebruiken voor het berekenen van de inhoud van de piramide:
inhoud = hoogte × grondvlak, inhoud = ⅓ × hoogte × grondvlak.
Welke? Bereken daarmee de inhoud van jouw piramide.
b Is de inhoud van Peter zijn piramide een kwart van die van jou?

4 De grootte van het papier, waarvan de piramides worden gemaakt, gaat variëren. Neem daarom voor de lengte van de zijde van een klein vierkantje x. Bedenk formules, met als variabele x, voor de hoogte, de oppervlakte van het grondvlak en de inhoud van de piramide.

● Bijdrage ● ● ● ●

Wiskunde 12-16 (experimenteel)

▶ Formules bij een piramide

Juul ten Hove

Het is lastig om uit het materiaal van W12/16 voor klas 3/4 twee werkbladen algebra te selecteren, waarmee leerlingen zó aan het werk kunnen. De opdrachten horen thuis in een zorgvuldig opgebouwd geheel en daardoor mis je al gauw een stuk voorwerk, of je komt niet toe aan de clou, die juist interessant is. Het is me dan ook niet helemaal gelukt. De werkbladen, die nu in het middendeel van dit blad zijn te vinden, komen uit een pakket met eindopdrachten over formules, geschreven voor klas 4. Ik heb ze enigszins aangepast. In het volgende probeer ik duidelijk te maken hoe ze in deze vorm te gebruiken zijn.

De bedoeling van opdracht 1: vanuit de beschrijving en de tekening een voorstelling maken van hoe de piramide eruit zal zien. Door de vragen vormen de leerlingen een beeld van wat er gaat komen: een piramide maken en afmetingen berekenen. Opdracht 2 completeert dat beeld: het formaat van het vierkant, waarvan de piramide gevouwen wordt, varieert. De vraag is dan wat de effecten zijn van de variatie op hoogte en oppervlakte, en in opdracht 3 ook op inhoud. Leerlingen hebben deze oriëntatie nodig, inclusief de berekeningen, voordat ze formules gaan maken. Ook het vouwen van de piramide hebben ze nodig. Sommige leerlingen zullen misschien in de eerste instantie dat vouwen als kinderachtig afdoen, maar al snel ontdekken ze dat je de piramide in vertikale richting kunt open vouwen en dan de hoogtelijn zomaar kunt zien (ze moeten de piramide dus niet dicht plakken!). Voor het berekenen van de oppervlakte van een zijvlak kunnen leerlingen profiteren van twee tips:
– vouw het papier twee keer dubbel, zodat je nog maar één zijvlak ziet;
– meet eerst met vierkantjes.

Het is erg moeilijk voor leerlingen om een verbinding te leggen tussen formules en de situatie, in dit geval het vouwblad met ruitjespatroon en de piramide. In een klassegesprek kun je misschien als docent terugkoppelen: als je in de formules voor x het getal 6 invult, krijg je dan dezelfde antwoorden als bij vraag 1 en 3?
In de opdrachten voor het pakket komt de kubus met ribbe x voor. De formules voor de inhouden van de piramide en de kubus laten goed zien dat de inhouden op dezelfde manier groeien. Dit wordt versterkt door het beeld: de verhoudingen in de figuren veranderen in beide gevallen niet door vergroten of verkleinen. Ook hier is het belangrijk om de situatie en de formules naast elkaar te zetten.

Tot zover zijn de activiteiten voornamelijk gericht op het zicht krijgen op de situatie. Voor leerlingen is het erg moeilijk om op verschillende manieren te kijken naar de piramide en vervolgens samenhang te zien in dat geheel. Die samenhang is kern van het algebraprogramma. In het vervolg van het pakket komen aspecten aan de orde als denken in termen van groei, en vergelijkingen opbouwen vanuit de situatie.
In het Trajectenboek liggen de accenten op sommige leerstofonderdelen wat anders; de opdrachten op de werkbladen in dit blad *illustreren* slechts een paar onderdelen uit het Trajectenboek.

▶ Wat al die cijfers verhullen

J. Visser

De bijdrage 'Uitkomsten enquête regionale bijeenkomsten' in Euclides nr. 9 (juni 1991) zal vast geen verkeerde cijfers bevatten, en er staat ook wel een relativerende opmerking over het feit dat hierbij niet alle wiskundeleraren zijn betrokken. Toch zijn wij bang dat de cijfers, en vooral het opgeroepen beeld ('Uiterst negatief is Goes... Eindhoven er steeds positief uitspringt.') een eigen leven gaan leiden, vermoedelijk vooral naar buiten toe, maar misschien ook wel bij lezers. Worden wij niet steeds weer als wiskundeleraren, ook in Euclides zelf, gewezen op het vereiste van representativiteit en de verplichting tot aselecte steekproeven bij statistische beweringen? Welnu, wie waren er (ietwat generaliserend natuurlijk) NIET bij die enquête betrokken:

1. Al die collega's die het na de eerste bijeenkomst al voor gezien hielden. Dat waren vast niet degenen die enthousiast waren.

2. Al die collega's die aan de hand van de plannen en voorstellen hun mening bepaald hadden en geen behoefte aan verdere toelichting hadden. Geldt dat niet voor de meesten van ons, terwijl het vooral de veranderingsgezinden zijn die –logisch– hun enthousiasme willen uitdragen? Daarentegen wil niemand graag in zo'n bijeenkomst als spelbreker beschouwd worden, dus iemand met grote bezwaren bedenkt zich al gauw twee keer alvorens daarheen te gaan.

3. Al die collega's die, uit ergernis over alle gedoe van hogerhand in de laatste jaren, zich teruggetrokken hebben op hun eigen, zware, taak en geen enkele behoefte meer voelen te vechten tegen de bierkaai. En wie heeft het recht deze grote groep teleurgestelden hun afwezigheid bij deze bijeenkomst te verwijten? Hoeveel, achteraf overbodig gebleken, bijeenkomsten hebben zij al bijgewoond?

4. Al die collega's die, wetend dat een of twee van hun sectiegenoten de honneurs voor hen waarnamen op deze bijeenkomsten, naderhand zijn ingelicht door die vertegenwoordigers. En vaak komen de grotere secties voor bij avo/vwo-scholen en in mindere mate bij de lbo-scholen, terwijl onder de invullers van de enquête 52% typisch lbo/mavo was en 18% typisch havo/vwo.

Deze opsomming overziend vrezen wij dat de veranderingsgezinde tendens in de mening van de wiskundeleraren die het artikel oproept, ver bezijden de werkelijkheid ligt. Bovendien waren deze bijeenkomsten niet bestemd voor collega's werkzaam in mbo of hbo, die pas veel later met de gevolgen van deze voorstellen in aanraking zullen komen.

Zou het langzamerhand eens geen tijd worden dat tegen hogerhand gezegd wordt:
één zinnig programma voor ALLE leerlingen van 12 tot 16 KAN NIET.

En wie kunnen dat beter zeggen dan de leraren in dat toch als notoir moeilijk bekend staande vak wiskunde. Want, hoezeer wij ervan uit willen gaan dat alle leerlingen *gelijkwaardig* zijn, ze zijn *niet gelijk* in hun capaciteit tot het werken met abstracties.
Als wij dat zeggen, het bij herhaling benadrukken, en onze leerlingen en onszelf ook niet laten gebruiken om toch een dergelijk programma te laten opleggen, dan moet dat ééns doordringen.

Bovendien, wanneer sommigen menen dat een dergelijk programma geprobeerd moet worden, laten zijzelf dan hun gang gaan, hun overtuiging overdragen op de ouders van hun toekomstige leerlingen en verslag doen van hun werkwijze *en hun resultaten* op een zodanig wervende (maar statistisch verantwoorde) wijze, dat steeds meer collega's willen volgen.

Dit artikel is geschreven namens de wiskundesectie van de C.S.G. de Heertganck te Heerde.

▶ Reactie

Marja Meeder

De enquête die aan het eind van de tweede regionale bijeenkomst is afgenomen, was bedoeld om de organisatoren van de bijeenkomsten een indicatie te geven over de waardering van de bezoekers voor de voorstellen en voor de bijeenkomsten en om wensen t.a.v. de bijeenkomsten in najaar 1991 kenbaar te maken. Het doel was niet om een steekproefonderzoek onder wiskundedocenten uit te voeren, waarbij men poogt representativiteit na te streven. Bij een steekproefonderzoek is aselecte trekking inderdaad een vereiste, maar dat was hier niet aan de orde. Door het plaatsen van de volledige uitslag van de enquête in Euclides heeft deze wel erg veel gewicht gekregen.
Belangrijker vind ik de opmerking dat een zinnig programma voor alle leerlingen van 12 tot 16 jaar niet kan. Als de schrijvers bedoelen één programma, dat voor alle leerlingen geschikt moet zijn, dan ben ik dat met hen eens. In de 'Leerstofbeschrijving wiskunde 12-16', die aan alle abonnees van Euclides in september 1991 is toegestuurd, heeft het team W12-16 dat duidelijk gemaakt door verschillende trajecten te beschrijven voor verschillende groepen leerlingen.
Het team W12-16 werkt aan leerplanvoorstellen voor lbo, mavo en de eerste drie leerjaren van havo en vwo en aan een nieuw examenprogramma voor lbo en mavo C/D. Zij doen dat in opdracht van de staatssecretaris, omdat velen in het wiskundeonderwijs, waaronder veel docenten èn de Vereniging van Wiskundeleraren, de bestaande programma's verouderd vinden, niet meer van deze tijd.
Alle wiskundedocenten krijgen de gelegenheid om invloed uit te oefenen op de voorgestelde veranderingen. Daarvoor is het wel nodig dat men kennis neemt van die voorstellen. Dat kan op veel manieren: via de al genoemde 'Leerstofbeschrijving wiskunde 12-16', via de Nieuwe Wiskrant W12-16 Special, die aan alle scholen voor lbo en avo is toegestuurd of door aanwezig te zijn op één van de regionale bijeenkomsten die op 12 plaatsen in het land worden georganiseerd door de NVvW. Wij hopen de komende maanden veel reacties te krijgen op de producten die wij op grote schaal verspreid hebben. Met behulp daarvan kunnen wij voorstellen maken die uitvoerbaar zijn in de praktijk, door wiskundedocenten die de taak hebben hun leerlingen voldoende toe te rusten voor hun toekomst.
Alle wiskundedocenten kunnen mondeling (op de bijeenkomsten) of schriftelijk hun reacties aan ons laten weten. Wij hebben nadrukkelijk de bedoeling op een democratische wijze aan programmavernieuwing te werken.

▶ Mededeling

Freudenthal-instituut

Op 14 september vond te Utrecht een symposium plaats ter gelegenheid van het 10-jarig bestaan van het OW & OC. Tegelijk werd de naam van dit instituut voor de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs gewijzigd in Freudenthal-instituut. Na 10 jaar IOWO en 10 jaar OW & OC nu dus voor altijd Freudenthal-instituut.
Wij wensen de medewerkers van het Freudenthal-Instituut alle goeds bij hun werkzaamheden.

De redactie

▶ Onderwijs en resultaat

H. J. Smid

Onderzoek naar resultaten

In 1990 verscheen het boek 'Overzicht van leerresultaten aan het einde van de eerste fase van het voortgezet onderwijs', een publikatie van het Cito, handelend over resultaten van onderwijs in de vakken Nederlands, Engels, biologie en wiskunde. Interesse vanuit 'het veld' lijkt voor de hand te liggen. Hoe brengen wij, leerlingen en leraren, het er nu eigenlijk van af?
Voor leraren blijft overigens de kennis, uit dit soort publikaties te vergaren, vaak enigszins academisch. In de regel immers gaat het om tamelijk globale metingen van resultaten, waar je in de dagelijkse praktijk niet zo veel mee kunt beginnen. Niettemin kan zoiets best interessant zijn. Een mooi voorbeeld van zo'n boek is het prachtige 'Childrens understanding of Mathematics' van Kathleen Hart, dat onderzoek beschrijft dat zowel grootschalig is, en daardoor een representatief beeld geeft, als gedetailleerd is, waardoor het ook werkelijk inzicht geeft in hoe leerlingen met wiskunde omgaan.
In Nederland is grootschalig onderzoek eigenlijk alleen in het kader van de IAE-onderzoeken verricht: Wiegersma en Groen in 1968, en Pelgrum, Eggen en Plomp, 1983. Erg populair is dit soort onderzoek binnen de wereld van de wiskunde-dicactiek naar mijn indruk niet. Genoeg reden dus om eens met belangstelling te kijken naar deze Cito-publikatie.

Het Cito en het wiskundeonderwijs

Er is nog een andere reden waarom ik een bespreking van deze Cito-publikatie van belang vind. Het biedt de gelegenheid in te gaan op de positie van het Cito voor wat betreft het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Voor iedereen die tijdschriften als Euclides en de Nieuwe Wiskrant leest kan het duidelijk zijn dat die positie nogal problematisch is.
De recente, bepaald onvriendelijk te noemen discussie tussen Van Hoorn, hoofdredacteur van Euclides, en Kremers en Boertien van het Cito in Euclides nr. 7 van de vorige jaargang is geen uitzondering. Hoewel het Cito wel probeert in te spelen op de recente ontwikkelingen rond HEWET en HAWEX is de reactie van de zijde van de initiatoren van die ontwikkelingen altijd afwijzend geweest.
Ik zou een aantal mogelijke oorzaken willen noemen voor die moeizame situatie.
In de eerste plaats de hierboven al genoemde afkeer bij de Nederlandse wiskundedidactici ten aanzien van grootschalig kwantitatief onderzoek. Alleen al het feit dat hierbij veelal van vierkeuze-vragen gebruik wordt gemaakt lijkt soms al voldoende om hieraan weinig waarde toe te kennen.
Het Nederlands wiskundig-didactisch onderzoek bestaat vrijwel uitsluitend uit ontwikkelonderzoek, gericht op een soort wiskunde-onderwijs dat sterk afwijkt van wat sinds het eind van de jaren '60 gebruikelijk is.
Positief geformuleerd kan men dit onderzoek uniek noemen, maar wat minder positief gestemd zou, zeer eenzijdig eveneens een juiste karakterisering zijn. De evaluatie van dit onderzoek is daarbij mijns inziens vaak zwak, met name wat kwantitatieve aspecten betreft. In ieder geval passen de activiteiten van het Cito hierbinnen slecht.
In de tweede plaats draagt het Cito nu eenmaal het odium van de vertegenwoordiger van Zoetermeer, en van de fabrikant van de – door de vernieuwers vaak verfoeide – eindexamens. Daar is, vrees ik, niet veel aan te doen. In ieder geval maakt ook die rol, die het Cito nu eenmaal nogal eens in de positie van remmende factor ten aanzien van veranderingen brengt, het Cito niet populairder.
In de derde plaats speelt ongetwijfeld de verdeling

van taken over de instituten een rol. Voor wiskunde hebben we te maken met het OW & OC en de SLO voor leerplanontwikkeling, het Cito voor de toetsing.
Mijns inziens zou een concentratie van leerplanontwikkeling bij de SLO, en een omvorming van het OW & OC en dat deel van het Cito dat niet bij de eindexamens is betrokken, tot een meer fundamenteel onderzoeksinstituut voor de didactiek van de wiskunde, een grote verbetering zijn. Dan zouden wellicht zulke uiteenlopende soorten onderzoek, zoals het eerder gememoreerde grootschalige onderzoek van Kathleen Hart enerzijds, en het zeer in detail werkende cognitief georiënteerde onderzoek anderzijds, ook in Nederland van de grond kunnen komen.

Onderzoek en politiek

Ik hoop dat het voorafgaande heeft duidelijk gemaakt dat ik zeker niet bij voorbaat afwijzend sta tegenover het type onderzoek dat het Cito zou kunnen verrichten. Toch geloof ik niet dat we met de publikatie die nu besproken wordt, veel opschieten. In één opzicht is hij wel onthullend: het wordt pijnlijk duidelijk hoe het Cito voor wat betreft doel en opzet van onderzoek door de politiek gemanipuleerd kan worden.
Een krasse uitspraak wellicht, en ik haast me dan ook om dit te beargumenteren.
Het onderzoek heeft plaatsgevonden op verzoek van de minister, op advies van de CCE (coördinatiecommissie evaluatieplan voortgezet onderwijs – er wordt wat een werkgelegenheid gecreëerd voor onderwijskundigen). Dat kan volgens de Wet op de Verzorgingsstructuur, en daar hoeft ook niets op tegen te zijn.
Als doel wordt genoemd: 'het in kaart brengen van de leerresultaten zoals bereikt aan het eind van het derde leerjaar van het vigerende voortgezet onderwijs' (blz. 9). Dit niet uit wetenschappelijke nieuwsgierigheid, maar om die resultaten 'te vergelijken met de resultaten zoals die in de nabije toekomst aan het einde van de eerste fase bereikt zullen worden' (blz. 9). Hiermee wordt de eerste fase van de basisvorming bedoeld.

Hier komen de problemen al om de hoek kijken. Het is maar zeer de vraag of zo'n vergelijking ooit zinvol zou kunnen zijn. Het gaat immers bij die beoogde basisvorming niet om in principe dezelfde leerstof, die op andere wijze wordt onderwezen, maar om, geheel of gedeeltelijk, andere leerinhouden, in een heel andere situatie.
Als bijvoorbeeld zou blijken dat tweedegraads vergelijkingen straks minder goed zouden worden opgelost dan nu, wat zegt dan zo'n resultaat als dat verklaard zou kunnen worden door de omstandigheid dat er ook minder ruimte voor is in het programma? Natuurlijk leren leerlingen bij andere programma's andere dingen, en mogen appels en peren niet vergeleken worden.
Indien er nu een helder beeld zou bestaan van de inhoud van de nieuwe basisvorming, dan zou misschien op gemeenschappelijke elementen nog enige zinnige vergelijking mogelijk zijn. Maar daarvan was geen sprake. Onder druk van de politiek moest en zou het hele onderzoek in het schooljaar 87/88 worden uitgevoerd; want in '88 zou immers al de eerste start van de basisvorming plaatsvinden! (op moment van schrijven, mei/juni '91, vindt de parlementaire discussie plaats).
Hoewel het Cito uiterst beleefd blijft jegens de minister is het de lezer wel duidelijk dat dit een ramp was. Niet alleen was er op dat moment nauwelijks enig zicht op de inhoud van de basisvorming, wat het hele idee van vergelijken al zinloos maakte, maar bovendien waren allerlei noodzakelijke technische zaken, zoals bijvoorbeeld een proefafname, door de tijdsdruk niet mogelijk. Dit is niet de plaats om alle kunstgrepen te bespreken die het Cito moest toepassen om de zaak technisch gesproken nog enigszins te redden. Kort gezegd komt het er op neer dat men een zeer uitgebreide toets heeft afgenomen, met de bedoeling hieruit dan achteraf geschikte vragen te selecteren, en de selectie van die vragen dan als vergelijkend meetinstrument te gebruiken. Evenmin ga ik in op de selectie van de deelnemende scholen, omstandigheden van de toetsafname, en allerlei toegepaste statistische technieken. Ik geloof graag dat het Cito zijn vak verstaat. Waar het mij om gaat is dat het

hele doel: het vergelijken van twee toch al moeilijk vergelijkbare zaken, nu geheel zinloos is.
Het treurige is dat ik bij lezing geheel niet het gevoel kreeg dat dat de opdrachtgevers van het onderzoek interesseerde. Dat wordt aardig geïllustreerd door het feit dat per se – op wens van die CCE – biologie in het onderzoek moest worden opgenomen. Op de meeste scholen wordt in het derde leerjaar geen biologie gegeven, wat niet alleen de bereidheid van scholen om hieraan mee te doen beïnvloedde, maar uiteraard ook de zin van dat deel van het onderzoek uiterst twijfelachtig maakt. Niettemin hield de CCE vast aan biologie, 'omdat het naast wiskunde een tweede exact (sic!) vak gewenst achtte' (blz. 16). Of het zin heeft of niet: kies exact! Wat de gevoelens van de onderzoekers geweest zullen zijn toen, nadat zij gedwongen waren een dergelijk kreupel onderzoek uit te voeren, terwijl bleek dat de basisvorming jaar na jaar uitgesteld werd, en er bovendien weer voortdurend van alles veranderde, laat zich raden...
In feite geeft het Cito in het rapport ook wel toe dat men voor een onmogelijke opgave stond. Niettemin meent men een rapport te kunnen presenteren waarin 'zinvolle informatie wordt gerapporteerd die van belang is voor de verdere ontwikkeling en evaluatie van de basisvorming' (voorwoord).
Mij is niet duidelijk geworden waarop dit optimisme is gebaseerd.

Wiskunde

Dan nu het onderdeel dat voor ons het meest interessant zou kunnen zijn: wiskunde.
Het betreffende hoofdstuk is van de hand van H. Boertien. Het begint met een wat algemene beschrijving van de ontwikkelingen in het vak wiskunde en wat de verwachtingen zijn ten aanzien van de basisvorming. Ook hier blijft natuurlijk de onduidelijkheid rond die toekomstige basisvorming een probleem.
Uitspraken als: 'De inhoud van het toekomstige wiskunde-curriculum is dus gericht op wiskundige denkwijzen en wiskundige kennis en vaardigheden' (blz. 228) zijn niet erg verhelderend. Je vraagt je hoogstens af waarop het huidige wiskunde-onderwijs volgens de auteur dan gericht zou zijn.
Vervolgens wordt uitvoerig toegelicht hoe de constructie van de opgavenverzameling voor de proefafname heeft plaatsgevonden. Het blijkt dat voor opgaven gericht op het huidige onderwijs geput is uit de Cito-bundels leerdoelgerichte toetsen en de opgaven verzameling voor het IAE-onderzoek, verricht door de Universiteit Twente.
Het betreft hier vierkeuze-vragen en volgens Boertien is dit 'in veel gevallen een geschikte vraagvorm om te toetsen in hoeverre leerlingen het huidige onderwijs verwerkt hebben' (blz. 231). Ik denk dat deze argeloze opmerking aardig illustreert waarom de relatie van het Cito met het onderwijsveld zo moeizaam is. Ook formele wiskunde heeft natuurlijk veel meer in zich dan met alleen vierkeuze-vragen te toetsen is!
De toetsvragen voor het toekomstig wiskunde-onderwijs – in de basisvorming – waren wel in open vraagvorm geformuleerd. Hierbij bleek echter de beperkte afnametijd een groot probleem. Het is immers niet moeilijk in te zien dat een afnametijd van 90 minuten, met de wens een zo groot mogelijk aantal onderdelen van een huidig en een mogelijk toekomstig wiskunde-curriculum aan de orde te stellen, wel moet leiden tot een groot aantal korte, vrij gestructureerde vragen. De toets zal dus, om het zo maar eens te zeggen, eerder een Cito – dan een OW & OC -karakter gedragen hebben.
Uit het grote aantal vragen tijdens de proefafname is dan weer een vergelijkingstoets geselecteerd, die als basis moet dienen voor toekomstige vergelijkingen. Ook dat was blijkens het rapport niet zonder problemen, maar ik laat dat alles nu maar verder rusten.

Resultaten?

Hierboven heb ik mijn twijfels geuit over de zin van dit onderzoek, in ieder geval voor wat betreft het expliciet geformuleerde doel van het vergelijken van het huidige en het toekomstige onderwijs. Dat neemt niet weg dat toch een meting van de resultaten in het huidige onderwijs de moeite waard kan zijn.
Helaas was het deel van het rapport dat hier op in ging het deel dat mij het meest teleurstelde. Wil je immers iets aan zo'n verslag hebben, dan moet je

kunnen zien welke vragen gesteld zijn, en wat de resultaten per vraag nu precies waren. Dan kun je zien wat goed beheerst wordt, waar problemen liggen en kunnen de resultaten ook betekenis krijgen, bijvoorbeeld vanuit kennis van zaken van leerprogramma's op de verschillende schoolsoorten.
Van de opgaven van de toets zelf krijgen we echter vrijwel niets te zien, niet meer dan welgeteld twee open vragen die als voorbeeld van opgaven passend bij de toekomstige basisvorming gepresenteerd worden.
Verder horen we dat de toets betrekking had op de onderdelen voortgezet rekenen; functies, verbanden, grafieken; meetkunde in R2 en R3; kansrekening en statistiek; en complexe vaardigheden. Een merkwaardige opsomming! 'Complexe vaardigheden' past helemaal niet in dit rijtje, maar hoort in een andere dimensie thuis. Kansrekening en statistiek lijkt van de bovenbouw naar de onderbouw verdwaald. In het rapport wordt van dit onderdeel opgemerkt dat dit 'grotendeels een beroep doet op gezond verstand' (blz. 249). Met andere woorden: dit onderdeel had hier helemaal niet getoetst moeten worden.
Dat alle onderdelen behalve complexe vaardigheden nog wat verder uitgesplitst worden, met vermelding van hoeveel vierkeuze-, resp. open vragen per subonderdeel gesteld werden, biedt natuurlijk nauwelijks meer informatie zolang je de vragen niet kent.

De informatie die over de toetsresultaten geboden wordt is dan ook uiterst globaal. We vernemen niet meer dan de gemiddelde p-waarden per schoolsoort – lhno, lto, mavo, havo, vwo – en per leerstofonderdeel, het hierboven genoemde vijftal.
Voor voortgezet rekenen zijn die het hoogst, voor complexe vaardigheden het laagst. Wie zal dat verbazen? Dat de volgorde van prestaties per schoolsoort dezelfde is als bovengenoemde volgorde is ook al niet verrassend. Wat zegt het feit van een gemiddelde p-waarde van 61 op het vwo voor meetkunde zolang ik geen idee heb wat er gevraagd werd en wat er goed of fout ging?
Een p-waarde van rond de 20 voor sommige onderdelen op het lhbo, daarbij in aanmerking genomen dat de helft van de vragen uit vierkeuze-vragen bestond, betekent waarschijnlijk alleen maar dat de leerlingen hierin nooit enig onderricht hebben gehad. Dat had wel eenvoudiger vastgesteld kunnen worden.
Voorts worden nog wat resultaten vermeld van jongens respectievelijk meisjes – jongens doen het iets beter –, niet-doublanten respectievelijk doublanten – nauwelijks verschil en allochtonen versus autochtonen, de laatsten doen het iets slechter. Ook wordt nog gekeken naar de relatie tussen leerlingresultaten en opleidingsniveau van de ouders. Veel nieuws biedt dit alles niet en het vermelden van allerhande theorieën op deze terreinen maakt het ontbreken van echte informatie niet goed.

Conclusie

Het in dit artikel besproken rapport vond ik teleurstellend. Ik zeg dit niet omdat het Cito in mijn ogen geen goed zou kunnen doen. Integendeel, ik vind dat wat meer grootschalig, kwantitatief onderzoek zoals het Cito dat zou kunnen doen binnen de Nederlandse wiskunde-didactiek meer kansen zou moeten krijgen.
Maar dan niet door middel van een door politieke opportuniteit afgedwongen zinloze vraagstelling en opzet en evenmin met een rapportage die geen enkel inzicht geeft in wat er ondanks alles wellicht toch aan waardevol materiaal is verzameld.
Dat gebrek aan echte informatie geldt overigens ook voor de vakken Nederlands, Engels, en biologie, waar evenmin duidelijk wordt wat er nu precies getoetst is. Kennelijk moest de rapportage in een algemeen onderwijskundig patroon geperst worden en was dat belangrijker dan het informatiegehalte.

Hopelijk krijgt de sectie wiskunde van het Cito nog eens de gelegenheid zich te revancheren en met het verzamelde materiaal een echt, en dus informatief, onderzoeksrapport samen te stellen.
Pas dan valt te beoordelen wat dit onderzoek werkelijk waard was.

▶ 'Onderwijs en resultaat' vanuit het Cito gezien

E. J. J. Kremers, H. Boertien

Het artikel 'Onderwijs en resultaat' gaat over een Cito-onderzoeksrapport dat kritisch bezien wordt. Daarom is het vanzelfsprekend dat wij graag willen ingaan op wat Smid, de schrijver van het artikel, stelt. Wij waarderen het dat de heer Smid getracht heeft ons werk zo onbevooroordeeld mogelijk te benaderen. Dat hij daarbij bepaalde aspecten volgens ons verkeerd inschat of interpreteert doet daar niets aan af. In het vervolg zullen we de informatie op deze punten wat aanvullen of nuanceren. In dit korte bestek kunnen wij overigens alleen op de o.i. belangrijkste punten ingaan. Daarmee laten wij bepaalde opmerkingen over de positie van het Cito graag voor rekening van de auteur.

Allereerst dit. In tegenstelling tot wat er over de positie van het Cito gezegd wordt, is het niet alleen maar ellende wat de pot schaft. In Euclides en in de Nieuwe Wiskrant schrijft men zeker niet alleen negatief over het Cito, integendeel (vgl. Euclides jrg. 65, november 1989 en NW jrg. 10, maart 1991). Dat het Cito de overheidstaken niet uitvoert tot tevredenheid van *allen* die het onderwijs snel willen veranderen, is begrijpelijk. De overheid vraagt namelijk als opdrachtgever doorgaans om produkten die niet al te ver af staan van de *bestaande* onderwijspraktijk.

Als er door het Cito echter ingespeeld moet worden op vernieuwingen, dan zijn de voorstellen daartoe ook navenant. Zo organiseren we ten behoeve van de invoering van de basisvorming proefafnames voor werkstukken wiskunde. Daarbij houden we wel steeds de praktische uitvoeringsmogelijkheden in het oog. Het hangt kortom van het kader af of wij al dan niet 'behoudend' bezig zijn.

Natuurlijk heeft Smid gelijk als hij stelt dat het onderzoekdesign door omstandigheden weinig ideaal was. Bij de aanvaarding van het onderzoek is door ons de volgende afweging gemaakt:

a. de opdracht weigeren, met als zekere uitkomst het ontbreken van empirische gegevens die van belang kunnen zijn voor de invoering van de basisvorming. Dit zou een hoogst onwenselijke situatie opgeleverd hebben, vergelijkbaar met die waarin het middenschoolexperiment na 15 jaar geëindigd is. Zoals bekend heeft er nooit een gedegen evaluatie plaatsgevonden van leerresultaten van leerlingen in middenscholen.

b. de opdracht aanvaarden: met nogal wat mitsen en maren. Deze leken echter met de nodige technische en inhoudelijke creativiteit niet onoverkomelijk.

Uiteindelijk is eind '87 voor b. *gekozen* (het onderzoek is het Cito dus niet opgedrongen). Maar toegegeven: met de opname van het vak biologie hadden wij moeite. Op dat moment was bovendien niet te vermoeden dat de basisvorming nog zo lang op zich zou laten wachten.

Terzijde zij nog opgemerkt dat het ministerie de formele opdrachtgever van het onderzoek was. Voor de inhoud van de opdracht was echter de CCE verantwoordelijk. Wij wijzen er nadrukkelijk op dat de CCE een onafhankelijke adviescommissie is. In deze commissie zaten onder andere de hoogleraren Hofstee, Scheerens en Meijnen. De commissie heeft zich altijd strikt politiek onafhankelijk opgesteld. Wij bestrijden dan ook dat het Cito slachtoffer zou zijn van politieke manipulatie.

De door Smid geschetste problemen van vergelijkbaarheid zijn zeker niet fictief, maar o.i. wel oplosbaar. Daarover verschillen we van mening. Ook over het zicht op basisvorming. Om de problemen tot hun ware proportie terug te brengen: het onder moeilijke omstandigheden vergelijken van twee moeilijk vergelijkbare zaken is niet zinloos, maar

gewoon moeilijk. Ook is de feitelijke samenstelling van de vergelijkingstoets uitgevoerd toen de eindtermencommissies hun taak afgerond hadden. Daardoor is de oorspronkelijke toetsopzet (een toets die evenwichtig aandacht schenkt aan zowel het huidige als het toekomstige onderwijs) o.i. beter gerealiseerd dan Smid in een pessimistische bui beredeneert. Maar natuurlijk heeft hij gelijk als hij zegt dat de zaken idealiter beter hadden gekund.
In feite hebben wij de oplossing voor het mogelijk maken van een vergelijking van resultaten gezocht en gevonden in een manier van werken. Ons uitgangspunt was eerst te verwoorden wat voor vergelijking in aanmerking zou komen en wat we daarbij redelijkerwijs voor veranderingen mochten verwachten. Dan een toets ontwikkelen met daarin voldoende opgaven zowel passend bij het huidige als bij toekomstige wiskunde-onderwijs. Voor de manier waarop dat verder is ingevuld, kunnen we verwijzen naar het onderzoeksrapport.
Wij zijn er van uitgegaan dat er naast alle veranderingen in het vak wiskunde ook een invariant deel zou zijn. De vraag was natuurlijk: welk deel. Daartoe is min of meer een trendanalyse gemaakt van de ontwikkeling van het vak wiskunde. De door Smid aangehaalde zin 'De inhoud van het toekomstige wiskunde-curriculum is dus gericht op wiskundige denkwijzen, kennis en vaardigheden.' (blz. 228 van het rapport) geeft als zodanig aan op welke onderdelen wij onze analyse hebben gericht. In hetzelfde hoofdstuk staat ook hoe wij de accentverschuivingen op deze aspecten van het vak inschatten. Namelijk dat het accent van zuiver wiskundige kennis en vaardigheden naar wiskundige denkwijzen (toepassing) zal verschuiven. Als Smid zich dan ook afvraagt waarop dan wel het huidige onderwijs gericht is, dan is hiermee het antwoord gegeven: meer op zuiver wiskundige kennis en vaardigheden dan in het toekomstige wiskunde-onderwijs. Deze zaken zijn niet nieuw voor wiskundigen, zoals Smid, die zich actief met onderwijsvernieuwing bezig houden. De aangehaalde zin is voor hem overbodig. Dit rapport is echter niet in de eerste plaats geschreven voor wiskundigen, zelfs dit wiskunde hoofdstuk niet. De afzonderlijke (uitgebreide) vakhoofdstukken richten zich op allen die geïnteresseerd zijn in de vakinhoudelijke uitwerking van de algemene onderzoeksopzet. Dat hoeven dus niet alleen de echte vakbroeders (bijvoorbeeld wiskundigen) te zijn. Het rapport is immers een onderwijskundig onderzoeksrapport.
Zoals de hiervoor besproken zin uit het rapport uit de context gelicht is en daardoor een andere betekenis krijgt, zo is het ook met de zinnen die de vraagvorm betreffen. Het kan niet ontkend worden dat in een aantal gevallen meerkeuze-opgaven goed te gebruiken zijn bij toetsing van wiskunde. Dit geldt met name voor formele wiskunde. Dat is een onderzoek van een dergelijke omvang om praktische redenen waar mogelijk de meerkeuzevorm de voorkeur verdient, is vanzelfsprekend. Dat het onderwijsveld daar wel eens (dikwijls zonder afdoende argumentatie) anders over denkt, is waar. In het onderzoek is daarom waar mogelijk de wiskunde van het huidige leerplan met meerkeuzetoetsen getoetst, hoewel daarbij ook open vragen gebruikt zijn. De term '... in veel gevallen een geschikte vraagvorm ...' dient men zo te interpreteren. Voor de doelen van het toekomstige wiskunde-onderwijs hebben wij echter – hopelijk voor ieder om begrijpelijke redenen – de open vraagvorm gekozen. Door evenwichtig aandacht te willen schenken aan het huidige en toekomstige wiskunde-onderwijs heeft de toets vanzelf een open karaker gekregen. Wellicht niet zo open als Smid denkt dat OW & OC zou wensen, maar dat is bij een dergelijk onderzoek, waarin open probleemstellingen toch nog altijd goed beoordeelbaar moeten zijn, ook niet te verwachten. Tenslotte stonden we bij dit onderzoek voor de niet geringe taak om open werk van ±8500 leerlingen te beoordelen.
Er zijn nog een paar zaken waarbij een toelichting op zijn plaats is. Bij toetsconstructie is het gebruikelijk een evenwichtige samenstelling na te streven. Daartoe zijn er vier grote vakonderdelen onderscheiden. Zodra men echter opgaven wil indelen in precies één van deze vakonderdelen, dan blijkt dat dit niet altijd kan omdat ze op meer dan één vakonderdeel een beroep doen. In dat geval hebben we een opgave complex genoemd. Een dergelijk categoriseringsprobleem ontstaat bij elke indeling.
De complexe opgaven doen dikwijls een beroep op de algemene problem-solvingvaardigheden die in

het toekomstige onderwijs nadrukkelijk aan bod zullen komen. Ook in deze zin zijn ze dan complex te noemen.
Het onderdeel kansrekening en statistiek krijgt in het toekomstig onderwijs naast meer aandacht een toegepast karakter. De bijbehorende opgaven betreffen: handig tellen, combinatoriek, inschatten van verwachtingen, frequentietabellen en statistische diagrammen. Zij doen in realistische situaties een beroep op weinig zuiver wiskundige kennis en algemene vaardigheden, vervlochten met relatief veel algemene wiskundige denk- en werkwijzen, die men ook wel eens samenvattend betitelt met 'gezond verstand'.
De heer Smid uit zijn teleurstelling over de relatief geringe aandacht die in dit grootschalige onderzoek aan wiskundige leerinhouden gegeven is. In feite zou hij graag een volgens hem zinvoller onderzoek uitgevoerd zien dat voor de wiskunde-didaktiek van meer belang is. Met name is hij teleurgesteld over het niet opnemen van de toets zelf waarop de resultaten gebaseerd zijn. Wij kunnen ons die teleurstelling goed voorstellen. Wiskundigen houden er (o.i. terecht) van de data te interpreteren aan de hand van het daarbij horende authentieke materiaal. Anders heeft het interpreteren op zich niet zoveel zin en is een gegeven interpretatie niet controleerbaar. Waarom hebben wij de toets zelf dan niet opgenomen? Het antwoord is simpel: de toets moet geheim blijven! Einde schooljaar 92-93 zal de toets opnieuw in het derde leerjaar van het voortgezet onderwijs afgenomen worden. Voor een zinvolle vergelijking in de tijd is het een absolute voorwaarde dat de toets dan niet bekend is bij leerkrachten en leerlingen. Binnen die restrictie van geheimhouding hebben we echter geprobeerd in de vakinhoudelijke hoofdstukken zoveel mogelijk informatie te geven over het proces van opgavenconstructie, toetssamenstelling en analyse van de resultaten. Dit alles met als doel de gevolgde werkwijze zoveel mogelijk transparant te maken voor vakgenoten. We hebben dit mede gedaan, juist omdat in nogal wat onderwijskundige publicaties essentiële vakinhoudelijke informatie onderbelicht of zelfs helemaal niet vermeld wordt, wat wij betreuren.
Wij zijn dan ook oprecht verbaast dat Smid stelt dat hij zich *nauwelijks* een beeld kan vormen van wat nu feitelijk onderzocht is.
Tenslotte een kanttekening bij de waarde van de gevonden resultaten. Veel nieuws bieden de resultaten allemaal niet, volgens Smid. Allereerst merken wij op dat in het rapport gesteld wordt dat het belang van de resultaten vooral ligt in de basis die zij bieden voor vergelijking met resultaten uit toekomstig onderzoek. Het onderzoek heet niet voor niets een 'uitgangssituatiemeting'. Keren de trends die nu opduiken ook terug als de basisvorming is ingevoerd? Los daarvan hebben de uitkomsten na publicatie van het rapport mei 1991 de nodige aandacht in de pers gehad. Recentelijk heeft de politiek de resultaten waardevol genoeg gevonden om ze in de Tweede Kamer in het debat over de basisvorming aan te halen als onderbouwing van voorstellen voor verbetering van ons onderwijs.
Wij hebben in het voorgaande waarschijnlijk op veel maar niet alle vragen van Smid verduidelijkingen of antwoorden gegeven. Ook nu hebben we de toets zelf niet gepubliceerd. De heer Smid is echter ten allen tijde welkom in Arnhem om te zien welke soorten opgaven in die toetst zitten.

Over de auteurs:
Drs. E. J. J. Kremers is projectleider Afsluiting Basisvorming en H. Boertien is medewerker wiskunde bij het Cito.

▶ Tot slot

De reactie vanuit het Cito op mijn bespreking van het onderzoeksrapport is op een aantal punten verhelderend. Dat ik hun positie en standpunt nu soms beter begrijp betekent natuurlijk niet dat ik het er dan altijd mee eens ben, maar dat zal ook niemand verwachten. De lezer kan in ieder geval zelf zijn opinie bepalen.
Ik wil nog één ding benadrukken. In mijn bespreking rep ik van een rapport geperst 'in een algemeen onderwijskundig patroon'. Kremers en Boertien formuleren het anders (gelijk hebben ze), maar het komt er op neer dat het een onderwijskundig rapport is, niet bestemd voor wiskundigen, en ook

niet (voeg ik dan maar toe) voor wiskundeleraren. Ik denk dat daarmee precies wordt aangegeven waarom dit rapport voor mij uiteindelijk toch een teleurstelling was. Dat wordt treffend geïllustreerd door het feit dat Kremers en Boertien zich er over verbazen dat ik vind dat er zo weinig inhoudelijke informatie gegeven wordt. Daar verbaas ík mij dan weer over: 'de gevolgde werkwijze transparant maken' verheldert de werkwijze, maar niet de inhoud.
Ik herhaal daarom nog eens de suggestie aan het einde van mijn bespreking: hopelijk produceert het Cito, nadat er geen redenen meer zijn tot geheimhouding van de test, een rapport dat wel voor wiskundeleraren geschreven is, en dus, naar mijn normen, vooral inhoudelijke informatie biedt. Ik zou het zonde van het verzamelde materiaal vinden als dat niet zou gebeuren.

H. J. Smid

Mededeling

Examen wiskunde A vwo

In de zgn. gele vellen van Uitleg, het voorlichtingsblad van het Ministerie van O & W, van 2 oktober 1991, komt een CEVO-mededeling voor over het centraal examen wiskunde A vwo.
Verwezen wordt naar het advies van de werkgroep interpretatie examenprogramma wiskunde A, de WIEWA (zie hiervoor ook de bestuursmededelingen in dit nummer en in Euclides 66-6). De CEVO heeft dit advies bestudeerd en vervolgens besloten de opgaven voor het onderdeel Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek vast te stellen in overeenstemming met het advies van de WIEWA, en wel met ingang van de examens in 1992. Het advies behelst verduidelijkingen en afbakeningen van het vigerende examenprogramma. Dit programma blijft dus geheel ongewijzigd.
Tegelijk publiceert de CEVO de relevante delen van het advies als bijlage bij de mededeling in Uitleg.
Nadere informatie is verkrijgbaar bij de directie VO/AVV van het ministerie, afdeling intake en dienstverlening, tel. 079-531990. Het gaat dan over CEVO-mededeling 91-397 d.d. 13 september 1991.

Boekbespreking

U. Storch, H. Wiebe, *Lehrbuch der Mathematik*, Band I: Analysis einer Veränderlichen, B.I.-Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich, 546 blz., D.M. 59,–.

Het Lehrbuch der Mathematik bestaat uit vier delen, waarvan in 1989 Band I verschenen is.
In dit deel worden behandeld: Mengen und Abbildungen, Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit, Primfaktorzerlegung, Reelle und komplexe Zahlen, Gruppen und Körper, Konvergente Folgen und Vollständigkeit, Reihen und Summierbarkeit, Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume, Stetigkeit, Funktionenfolgen und Potenzreihen, Differentiation, Konvexe Funktionen, Taylor-Formel und Hermite-Interpolation, Stammfunktionen und bestimmte Integrale, Eulersche Summenformel, Numerische Integration (u.a. Romberg-Verfahren), Uneigentliche Integrale (u.a. -Funktion, elliptische Integrale), Differentialgleichungen (u.a. lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten), Beispiele aus den Naturwissenschaften.

Het boek bevat talloze toepassingen en opgaven (o.a. over het 'vermoeden van Rieman' m.b.t. de Zeta-functie). Aan het eind van het boek volgen tafels van de Tschebyschew-polynomen, de Bernoulli-polynomen en de Bernoulli-getallen, alsmede een uitgebreid literatuuroverzicht en een register. In hoofdstuk I worden enkele voorbeelden gegeven voor het schrijven van een BASIC-programma, bijvoorbeeld voor n!; in één van de opgaven komen de getallen van Fibonacci aan de orde.

Bij de behandeling van reeksen worden, behalve uiteraard het convergentie-criterium van Cauchy, nog diverse convergentiekenmerken genoemd; ik miste de kenmerken van Raabe, Catalan en Schlömilch.

In het hoofdstuk over continuïteit komen ook de definities van Hölder en Lipschitz voor. Het voordeel van deze definities is dat men met een kwantor minder kan volstaan, hetgeen, althans theoretisch gezien, een pluspunt is. Bij de integraalrekening worden slechts enkele bladzijden gewijd aan oppervlakteberekening; pas in Band III komt de op het maatbegrip van Borel gebaseerde integraaltheorie van Lebesque aan de orde.

Het boek geeft, mede door het veelal gebruikte kleine lettertype, veel stof en maakt een zeer gedegen indruk. Het bevat (met de nog te verschijnen delen) de stof voor het 'Mathematik-Grundstudium' voor wiskundigen en fysici. Het wil me voorkomen dat het boek ook goede diensten kan bewijzen bij de opleiding voor de middelbare akten wiskunde. Een kennismaking loont zeker de moeite.

G. M. Hogeweij

● Recreatie ● ● ● ●

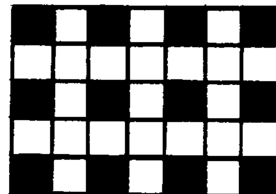
Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

▶ Opgave 631

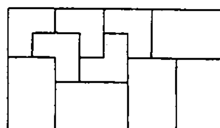
Voor de komende feestmaand een aantal tips op puzzelgebied. In grote speelgoedwinkels zijn momenteel een aantal manipulatie-puzzels te koop.
KAOS: Er zijn 6 doorzichtige buisjes, van verschillende lengte, die in het midden gedraaid kunnen worden. Hierdoor rollen gekleurde balletjes van de ene in de andere buis. De bedoeling is om balletjes van dezelfde kleur in de buis te krijgen.
SQUARE-1: Een schitterende variant op de Kubus van Rubik. Op de TV zag ik zelfs een reclamespotje voor deze puzzel!
PYRIX: Dit is een kettinkje van 15 kleine piramides met verschillend gekleurde vlakjes. De bedoeling is om één grote piramide te maken, waarbij ieder vlak één kleur heeft (rood, geel, groen of blauw).
Varianten hierop zijn de PYRUS en de PYRAM.
DIGI-DISC: Deze bestaat uit 7 onderling verwisselbare en afzonderlijk draaibare gekleurde magnetische schijven. Op deze schijven staan cijfers, bewerkingstekens en een =-teken.
De opgave is de schijven net zo lang te draaien tot rondom alle sommen kloppen. De preciese gegevens zijn:
Rode schijf: 1, 3, 2 en 4.
Oranje schijf: 1, 4, 3 en 2.
Gele schijf: 1, 4, 2 en 3.
Groene schijf: 1, 3, 4 en 2.
Blauwe schijf: +, ×, − en /.
Paarse schijf: +, ×, / en −.
Witte schijf: =, =, = en =.
Als we de schijven in de volgorde oranje, paars, groen, blauw, geel, wit en rood 'aan elkaar hechten', dan kunnen we rondom de volgende correcte sommen lezen:
$1 / 1 + 3 = 4$
$4 - 3 \times 1 = 1$
$3 + 4 - 4 = 3$
$2 \times 2 / 2 = 2$
De opgave van deze maand, die 5 ladderpunten oplevert, is om de andere twee oplossingen te vinden met de witte =-ring op dezelfde plaats als hierboven. Uiteraard gelden de voorrangsregels van 'Meneer Van Dale'. De inzendtermijn is 1 maand.

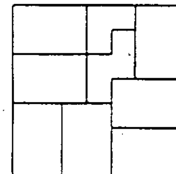
▶ Oplossing 628

In het laatste nummer voor de vakantie vroeg ik u rechthoeken te bedekken met 'right trominoes' en met 'skew tetrominoes'. Neem als voorbeeld de 5 bij 7 rechthoek en kleur de velden zwart-wit als volgt:



Elk zwart veld moet door een tegel bedekt worden. Een tegel kan niet tegelijkertijd twee zwarte velden bedekken. Elke tegel bedekt minstens drie vierkantjes. Conclusie: de 12 zwarte vierkantjes vereisen 12 tegels met minstens 36 vierkantjes. Maar we hebben maar 35 vierkantjes! Hierdoor is de 5 bij 7 rechthoek *niet* te bedekken met deze tegels.
Een 5 bij 9 rechthoek heeft 15 zwarte vierkantjes. Deze vereisen 15 tegels met minstens 45 vierkantjes. Maar we hebben er exact 45, dus we moeten 15 tromino's en 0 tetromino's gebruiken. In onderstaande oplossing zien we een van de vele oplossingen. Een 2 bij 3 rechthoekje kan op twee manieren bedekt worden met 2 tromino's.
Een 7 bij 7 vierkant heeft 16 zwarte vierkantjes. Deze vereisen 16 tegels met minstens 48 vierkantjes. Maar we hebben er 49, dus we hebben 1 tetromino nodig en 15 tromino's. Een oplossing met 7 rechthoekjes erin ziet u hieronder.
In totaal heb ik voor de betegeling nodig: 30 tromino's en slechts 1 tetromino. Een onverwacht resultaat, vind ik.





Met dank aan *Jacques Haubrich* (22), Eindhoven, die de tekeningen maakte.
Een bijzondere vermelding verdient de prachtige oplossing van *Wobien Bronstring-Doyer* (10), Leiden. Ze bewees alles m.b.v. algebra, een unieke methode in de polyomino-literatuur! Helaas is deze kolom te klein om haar methode te laten zien.
Met 26 punten is voor de tweede maal tot bovenaan de ladder geklommen:
Dick Buijs, Lutterveldsestraat 14, 4012 DE Kerk-Avezaath.
Mijn gelukwensen vergezellen de boekenbon van *f* 25,–.

• Verenigingsnieuws •



▶ Van de bestuurstafel

Agneta Aukema-Schepel

Het gonst deze maanden van de verenigingsactiviteiten. Alvorens de regionale voorlichtingsbijeenkomsten over de nieuwe programma's voor wiskunde van 12 tot 16 plaatsvonden, werden eerst twee proefbijeenkomsten in Amersfoort gehouden, om met de ervaringen hiervan de volgende 22 bijeenkomsten zo goed mogelijk te doen verlopen.
Wanneer u dit leest hebt u hopelijk mee genoten van onze jaarlijkse studiedag op 26 oktober. Een aantal van u uit de regio Breda is op 17 september aanwezig geweest bij een lezing door Rob Bosch over 'Grafen en matrices in wiskunde A'. Deze lezing kunnen wij ook in uw regio organiseren; zie hiervoor Euclides 67/1, september '91.
Dan volgen van 11 t/m 14 november de vijf bijeenkomsten over de nieuwe HAWEX-programma's. Om dit alles goed te laten verlopen, is en wordt door een grote groep leden enorm veel werk verzet. Wij zijn hen allen zeer dankbaar voor hun inzet ten bate van ons aller wiskundeonderwijs. Dankzij hen kunt u mondelinge informatie krijgen over de nieuwste ontwikkelingen en ervaringen uitwisselen met vele collega's, ook uit andere plaatsen.

Op welke wijze oefent de NVvW **invloed** uit op de nieuwe wiskunde voor 12- tot 16-jarigen?
Kort samengevat door:
– organisatie regionale bijeenkomsten, najaar 1990 en 1991,
– regionale werkgroepen, voorjaar 1991,
– vertegenwoordigers in de COW, (Joop van Dormolen en Francis Meester), waardoor alle opmerkingen direct doorgespeeld worden en zo invloed hebben op de plannen,
– het meezenden van de nieuwe leerstofomschrijving met Euclides,
– het schrijven van twee brieven in voorjaar 1991 aan de staatssecretaris, de eerste om de noodzaak uiteen te zetten van een gefaseerde invoering, jaar voor jaar, vanaf de eerste klas, gelijktijdig met de invoering van de basisvorming; en de tweede om duidelijk te maken dat invoering onverantwoord is zonder geld voor experimenten op de C proefscholen; in beide gevallen besliste de staatssecretaris tenslotte positief.
– het uitbrengen van een eindadvies aan de staatssecretaris in 1992.

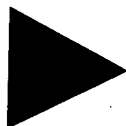
Hoe groot is nu de invloed geweest van de regionale bijeenkomsten in najaar 1990, van de NVvW-werkgroepen en van de door ons ontvangen opmerkingen van secties van scholen, op de eerste COW-plannen, zoals die in najaar 1990 bekend werden?
Bepaald niet onaanzienlijk want:
– er is meer aandacht besteed aan algebraïsche vaardigheden,
– het aantal onderwerpen is ingekrompen,
– er is meer accent gelegd op het onderscheid tussen C- en D-examen,
– er zijn extra onderdelen voor havo en vwo toegevoegd,
– er is per niveau een duidelijke lijn aangegeven,
– er is een voorstel gedaan over het aantal lessen dat per jaar aan elk onderwerp besteed kan worden,
– er wordt speciale aandacht besteed aan de lbo-B problematiek,
– er is besloten tot C- en D-examenstof die zo goed mogelijk aansluit bij het meest gekozen vervolgonderwijs, het mbo,
– het nieuwe D-examen sluit goed aan op havo-A.

Het geringe aantal D-leerlingen dat naar havo-B doorstroomt, heeft een veel beter ontwikkeld ruimtelijk inzicht dan nu, maar zal algebra moeten bijspijkeren; aangezien alleen zeer goede D-leerlin-

gen voor havo-B in aanmerking komen, zal dit hopelijk geen al te groot probleem geven. Na invoering van het COW-programma vraagt de ruimtemeetkunde in 4 havo minder tijd, dus kan er meer aandacht bested worden aan de algebra.

Gesprek op het ministerie
In augustus hebben de bestuursleden Jan Breeman, Hans van Lint en Jan Maassen samen met inspecteur W. Kleijne, prof. dr. J. v.d. Craats (voorzitter van de vaksectie havo/vwo wiskunde van de CEVO) en dr. B. van Putten, een gesprek gevoerd met vertegenwoordigers van de minister van onderwijs. Hier kwamen de problemen van het statistiekonderwijs binnen wiskunde A-vwo aan de orde. Het blijkt namelijk dat veel wiskundedocenten en ook examenmakers te weinig inzicht hebben kunnen verwerven in de statistiek zoals die op het vwo gegeven dient te worden. Een goede nascholing en continuering van de screening van examenwerk blijft noodzakelijk. Wij hopen dat men bij het ministerie van onderwijs nu goed van de problemen doordrongen is... Maar het standpunt op het ministerie is: 'Wij stellen de examenprogramma's vast, doch voor een goede invulling hiervan is de "infrastructuur" verantwoordelijk'.
Ofschoon alle vakmensen menen dat het rapport van de Werkgroep Interpretatie Eindexamenprogramma Wiskunde A-vwo (de WIEWA) slechts een interpretatie van het bestaande programma geeft meende men op het ministerie dat het een programmawijziging was, zodat een ambtenaar (geen wiskundige), aan de hand van het WIEWA-rapport een nieuw examenprogramma schreef, dat volgens hem binnen vier maanden vastgesteld kon worden. De NVvW is niet accoord gegaan met een programmawijziging; de samenstellers van het rapport zijn er van uitgegaan dat zij binnen het programma moesten blijven.
Wij hopen dat het WIEWA-rapport inmiddels toch door de CEVO in het gele katern van Uitleg is gepubliceerd. In het door de ambtenaar voorgestelde nieuwe programma kwam ook de invoering van de PRINT-plannen voor. Daar hiermee voorbijgegaan is aan ons advies, hebben we ons ook hiertegen verzet.
Sinds de bekendmaking van de nota 'Tweede fase voortgezet onderwijs' worden geen nieuwe programawijzigingen meer toegestaan omdat, na aanname van deze nota in het parlement, een stuurgroep zich moet gaan buigen over verandering van examenprogramma's in het kader van deelkwalificaties. Hierdoor wordt dus een noodzakelijke vernieuwing van het vwo wiskunde B-programma op de lange baan geschoven.

ICME
In de zomer van 1922 wordt in Quebec het 7e ICME-congres gehouden. Evenals voor vorige congressen heeft het bestuur besloten dat de NVvW in totaal maximaal *f*6000,– beschikbaar stelt om deelnemers aan dit congres te subsidiëren. Zij die voor subsidie in aanmerking wensen te komen, moeten dit voor 1 februari 1992 aan de secretaris berichten. Met de aanvragers zal contact worden opgenomen om te overleggen hoe de vereniging van hun ervaringen op het congres kan profiteren.



Mededeling

ICME-7

Van 16 tot en met 23 augustus 1992 zal in Québec, Canada, het zevende internationale congres over het wiskunde-onderwijs (ICME-7) plaats vinden.
Het congres wordt gehouden op de campus van de Université Laval.
Thema's die voorkomen op het voorlopige programma zijn:
- hoe de houding en de motivatie van leerlingen te verbeteren,
- wiskunde voor voortijdige schoolverlaters,
- onjuiste begripsvorming die bij leerlingen voorkomt,
- de gevolgen van het gebruik van rekenmachines,
- de rol van de meetkunde in het onderwijs,
- scholing, nascholing en bijscholing van leraren.

Wie inlichtingen wenst omtrent aanmelding, mogelijke accommodatie of over het zelf leveren van een bijdrage aan het congres wordt verzocht de zgn. Tweede Aankondiging (Second Announcement) van het congres aan te vragen bij Congrès ICME-7 Congress, Université Laval, Québec QC, Canada, G1K 7P4, tel. (418) 656-7592, fax (418) 656-2000.

Boekbespreking

J. van Eijck en E. Thijsse: *Logica voor Alfa's en Informatici*; Academic Service; *f*49,50; 363 blz.

Dit boek is een algemene inleiding in de logica. Hoewel de titel misschien anders doet vermoeden, wordt nergens de hand gelicht met de wiskundige exactheid; de voorbeelden worden nu eens niet uit de wiskunde gehaald, maar uit de taalkunde en de informatica.

Na een algemeen inleidend hoofdstuk, waarin de plaats van de formele logica in diverse wetenschappen wordt beschreven, wordt in hoofdstuk 2 een aantal begrippen uit de (naïeve) verzamelingenleer behandeld.
Hoofdstuk 3 is gewijd aan verschillende 'vormen' van oneindigheid: aftelbaar vs overaftelbaar en opsombaar vs recursief opsombaar.
De hoofdstukken 4 en 5 behandelen propositielogica:, syntax, semantiek en axiomatiek. Er wordt bewezen dat het gepresenteerde systeem correct, volledig en beslisbaar is.
In hoofdstuk 6 wordt de predikatenlogica geïntroduceerd. Ook hier het trio (syntax, semantiek, axiomatiek). De correctheid wordt bewezen, de volledigheid gemeld. Uitvoerig wordt aandacht besteed aan de onbeslisbaarheid van de predikatenlogica. In het kort wordt de onvolledigheidsstelling van Gödel aangestipt.
Hoofdstuk 7 beschrijft een aantal uitbreidingen van de predikatenlogica: meersoortige-, tweede orde- en gegeneraliseerde kwantoren logica; extensionele en intensionele logica en modale predikatenlogica.
Hoofdstuk 8 laat zien hoe logica kan dienen als basis voor een programmeertaal. In de declaratieve taal PROLOG bestaat een programma in feite uit een collectie definities van relaties, opgeschreven in een vorm die sterk overeenkomt met predikaatlogische formules. Dit in tegenstelling tot een klassieke (imperatieve) taal, waar een programma bestaat uit een lijst opdrachten. In dit hoofdstuk ook enige aandacht voor correctheidsbewijzen voor programma's die zijn geschreven in een imperatieve taal en het verband met dynamische logica.

Mijns inziens zijn de schrijvers er in geslaagd een uitstekend leerboek samen te stellen. Voor lezers die niet uit de exacte hoek komen, maar die toch een stevige portie formele logica nodig hebben vormt dit een goede mogelijkheid zich de wiskundige manier van denken eigen te maken. Maar ook voor wiskundigen die wel eens willen zien waarvoor niet-wiskundigen formele methoden gebruiken een bijzonder aardig boek.

Harm Bakker

Verschenen

R. Bodendiek (ed): *Contemporary Methods in Graph Theory*; BI Wissenschafts Verlag Mannheim; 98.00 DM; 676 blz.

Dit werk bestaat uit een collectie van 46 artikelen, bijeengebracht ter gelegenheid van de tachtigste verjaardag van Klaus Wagner, iemand die grote bijdragen heeft geleverd aan de ontwikkeling van de grafentheorie en de combinatoriek. De bundel bevat zowel elementaire als ook zeer gevorderde bijdragen.

F. Lorenz: *Einführung in die Algebra*, Teil I; BI Wissenschafts Verlag Mannheim; 44 DM; 335 blz.

Uitgaande van een aantal klassieke problemen (driedeling van de hoek, verdubbeling van de kubus, kwadratuur van de cirkel en construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken) ontwikkelt de abstracte theorie.
Dit heeft tot gevolg dat de volgorde van de onderwerpen sterk verschilt van de ordening in de meeste algebra leerboeken. Enkele onderwerpen: Lichaamsuitbreidingen, Priemfactorontbinding in Polynoomringen, Eindige Lichamen, Galoistheorie met toepassingen, oplosbaarheid van Vergelijkingen, Trancendentie van pi.

Kalender

11 november 1991: Arnhem, Regionale Hawex-bijeenkomst. Zie Euclides jg. 67 nr. 2, blz. 60.
12 november 1991: Groningen, Regionale Hawex-bijeenkomst. Zie Euclides jg. 67 nr. 2, blz. 60.
13 november 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
13 november 1991: Amsterdam, Regionale Hawex-bijeenkomst. Zie Euclides jg. 67 nr. 2, blz. 60.
14 november 1991: Zwolle en Eindhoven, Regionale Hawexbijeenkomst. Zie Euclides jg. 67 nr. 2, blz. 60.
11 december 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
15 januari 1992: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

Inhoud